

2016年度秋学期 応用数学（解析） 第15回

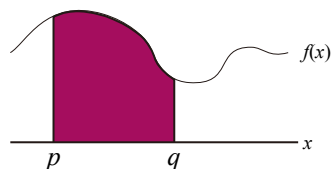
第5部・測度論ダイジェスト
ルベグ積分

浅野 晃
関西大学総合情報学部

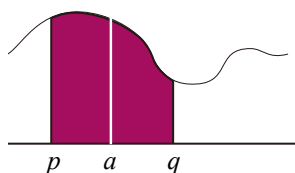


依然, 積分に対する疑問

積分に対する疑問

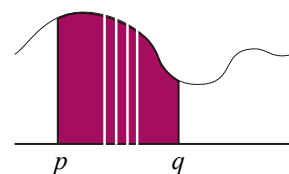


積分 $\int_p^q f(x)dx$



$\int_a^a f(x)dx = 0$ だから,
aのところで幅0の
直線を抜いても
積分の値は変わらない

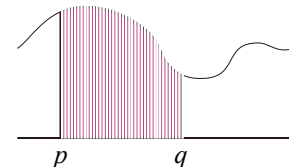
積分に対する疑問



$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

幅0の直線を何本抜いても
積分の値は変わらない

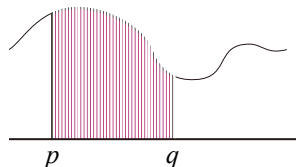
どれだけ拡大してみても,
びっしりと直線がならんでいる



可算無限個の直線を
抜いても
積分の値は変わらない
のか？

積分に対する疑問

どれだけ拡大してみても、
びっしりと直線がならんでいる



幅0の直線を可算無限個
抜いても
積分の値は変わらない
のか？

この疑問に答えるために、
pとqの間にある有理数全体が占める幅を
考える

可算無限個ある

2016年度秋学期 応用数学（解析）

有理数全体が占める幅

可算無限個ある有理数の幅を考えるには
ルベグ測度の考え方が必要

有理数の集合が数直線上で持つ幅（測度）

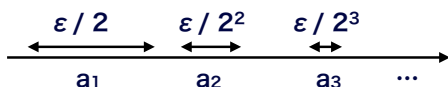
有理数全体を、区間の組み合わせで覆ったときの
「区間の長さの合計」の下限

2016年度秋学期 応用数学（解析）

有理数全体が占める幅

ε を任意の正の数とすると

有理数 $a_1, a_2, \dots$ を
こういうふうに覆うことができる



覆った区間の長さの合計

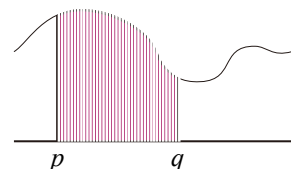
$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \dots + \frac{\varepsilon}{2^n} + \dots = \varepsilon$$

その下限がルベグ（外）測度で、すなわち0
有理数全体のルベグ測度は0

2016年度秋学期 応用数学（解析）

積分に対する疑問

この疑問はまだ解決していない。そもそも、

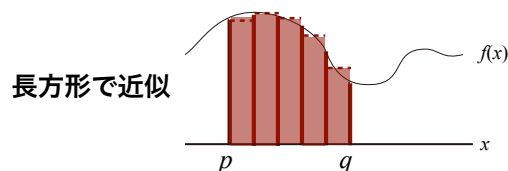


有理数の位置にある可算無限個
の直線を抜いた積分

ジョルダン測度にもとづく積分（リーマン積分）では、
可算無限個の分割はできない

2016年度秋学期 応用数学（解析）

区分求積法で積分を求める



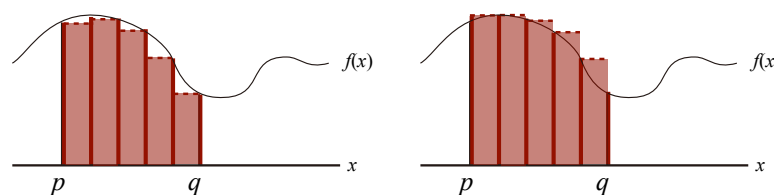
積分 $\int_p^q f(x)dx$ は,

積分区間を 重なりのない, 有限個の
区間に分けて,
その上の長方形の面積の極限

「極限」とは, 無限ではなく有限

2016年度秋学期 応用数学 (解析)

ジョルダン測度



こちらの上限
ジョルダン内測度

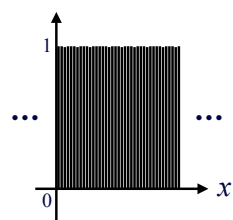
こちらの下限
ジョルダン外測度

両者が一致するときジョルダン測度という
2次元の場合これを面積という

ジョルダン測度が定まる図形 (集合) を
ジョルダン可測という

2016年度秋学期 応用数学 (解析)

こんな関数の積分は



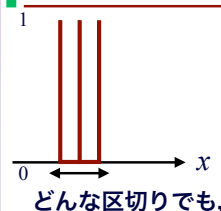
ディリクレ関数

$$h(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ は有理数} \\ 0 & x \text{ は無理数} \end{cases}$$

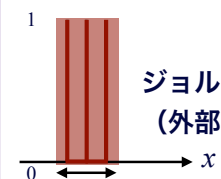
x軸上をどんなに細かく区切っても,
区切りの中に有理数も無理数も必ず存在する

2016年度秋学期 応用数学 (解析)

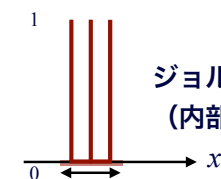
ディリクレ関数の積分



x軸上をどんなに細かく区切っても,
区切りの中に有理数も無理数も
必ず存在する



ジョルダン外測度
(外部の下限)



ジョルダン内測度
(内部の上限)

一致しないので

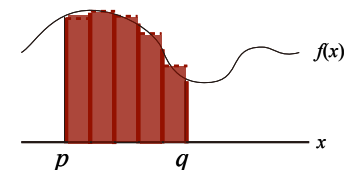
ジョルダン可測でなく, リーマン積分はできない

ルベグ測度にもとづくルベグ積分を考える

2016年度秋学期 応用数学 (解析)

ルベグ積分

何がいけなかったのか



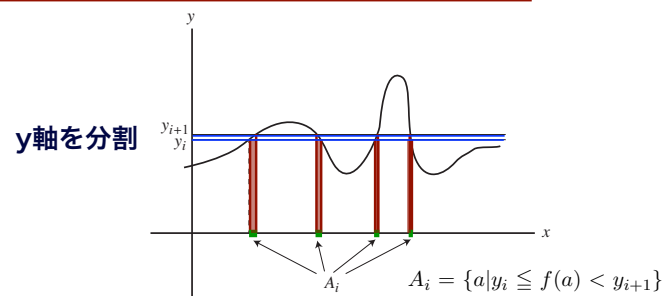
区分求積をするときに、
**x軸上を無理に分割しようとするから、
 有限個に分割できないとき困る**

y軸上のほうを分割し、

**x軸のほうは
 それに対応して分割されるようにすればいい**

2016年度秋学期 応用数学（解析）

ルベグ積分の考え方



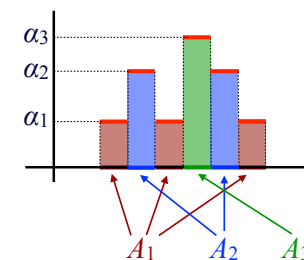
$y_i \times (\text{A}_i \text{のルベグ測度})$ を求める
 これを各 y_i について合計したものの、
 分割を細かくしたときの極限

**A_i がたとえ可算無限個に分れていても、
 ルベグ可測なら完全加法性があるから合計できる**

2016年度秋学期 応用数学（解析）

単関数とルベグ積分

単関数…
 こういう
 階段状の
 関数



$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(x; A_i)$$

x が A_i にあるとき
 値が1, 他は0
 【特性関数】

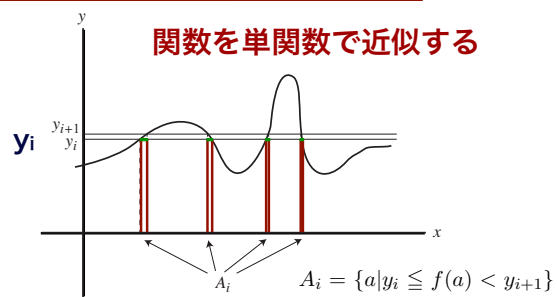
単関数のルベグ積分

$$\int_A \varphi(x) m(dx) = \sum_{i=1}^n \alpha_i m(A_i)$$

$\alpha_i \times A_i \text{のルベグ測度}$

2016年度秋学期 応用数学（解析）

可測関数



単関数で近似できるためには、どのようにy軸を分割しても図の A_i が可測でなければならない

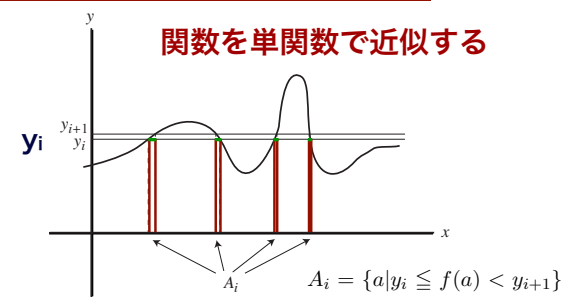
任意の a, b について

$\{x | a \leq f(x) < b\}$ が可測

【可測関数】

2016年度秋学期 応用数学（解析）

可測関数のルベグ積分



可測関数の
ルベグ積分

$$\int_A f(x) m(dx) = \sup \int_A \varphi(x) m(dx)$$

一番よい近似のとき

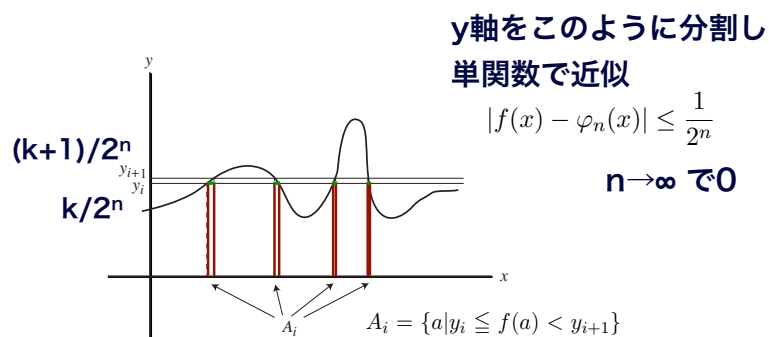
単関数で近似

2016年度秋学期 応用数学（解析）

可測関数のルベグ積分

$$\int_A f(x) m(dx) = \sup \int_A \varphi(x) m(dx)$$

本当にsupで
近似できるか？

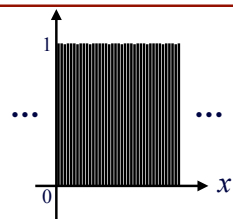


2016年度秋学期 応用数学（解析）

積分に対する疑問の答

A. Asano, Kansai Univ.

ディリクレ関数の積分



ディリクレ関数

$$h(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ は有理数} \\ 0 & x \text{ は無理数} \end{cases}$$

$$h(x) = 1 \times \varphi(x; Q) + 0 \times \varphi(x; R \setminus Q) \text{ という単関数}$$

xが有理数のとき1

xが無理数のとき1

有理数のルベグ測度は0

つまり、 $h(x)$ をどんな積分区間で積分しても0

今日のまとめ

ルベグ積分

x軸を細かく分割するのではなく、
y軸を分割して、それにしたがってx軸が
分割される

分割されたx軸の区間の長さはルベグ測度
で測るから、区間が可算無限個あってもよい

x軸でなくても

ルベグ可測な集合に対する可測関数ならOK

例：事象の集合と確率