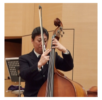
2016年度秋学期　画像情報処理　第２回

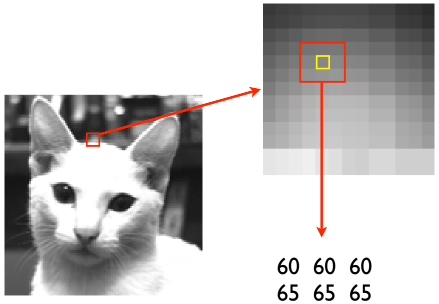
空間周波数とフーリエ級数

浅野　晃
関西大学総合情報学部



第１部のトピック

標本化と量子化



60 60 60
65 65 65
70 70 70

画像は，離散的な点（画素, pixel）の集まりでできている
［標本化］

各画素は，明るさ（輝度）を表す整数である
［量子化］

標本化と量子化

標本化（サンプリング）
・・・どのくらいの細かさで？
［空間周波数］

空間周波数を求めるのが
［フーリエ変換］

光による画像の生成

波の性質・回折と干渉

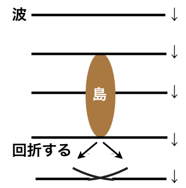
中国・銭塘江の「大海嘯」

（著作権の問題で画像を
はずしました）

http://www.nhk.or.jp/archives/nhk-archives/past/2006/h060430.html

「干渉」
重なると
強めあう

「回折」
島の裏側に
回り込む

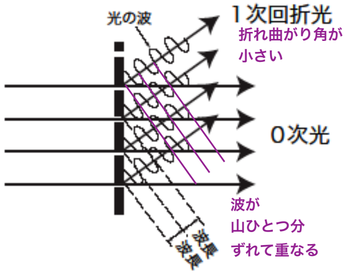


回折格子と１次回折光

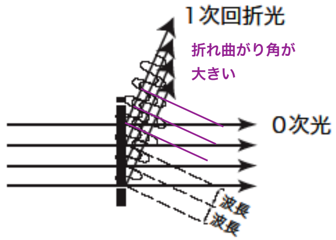
回折した光が
周期的に重なって強め合うと

細かい格子ほど
大きな角度で回折光が出る

粗い回折格子



細かい回折格子

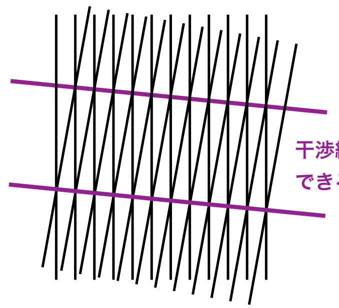


光の干渉

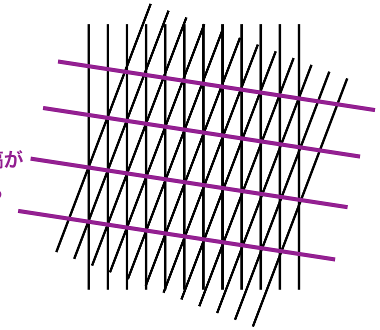
回折光と０次光が重なると再び縞ができる

細かい格子ほど大きな角度で回折光が出る

光の波



角度が小さいと
粗い縞

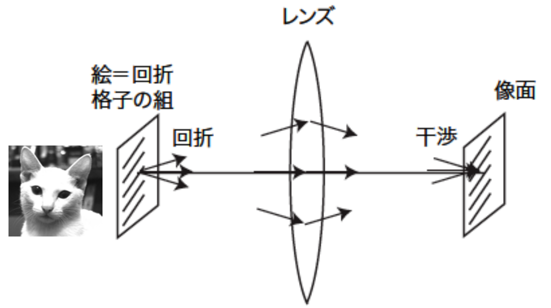


角度が大きいと
細かい縞

格子が再現される

画像の生成（結像）

画像は回折格子の重ね合わせであり，
それぞれの回折格子で回折された光が
像面で干渉して，画像が再現される

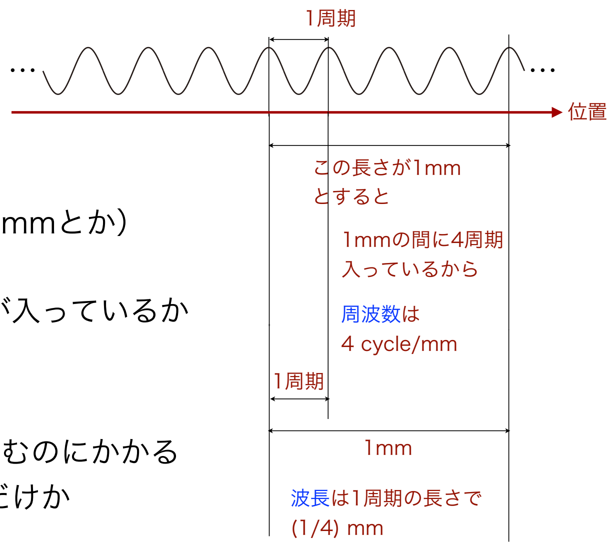


画像は回折格子，すなわち波の重ね合わせである
この計算が「フーリエ変換」

空間周波数とフーリエ級数

波の周波数と波長

基本的な波
三角関数で表す

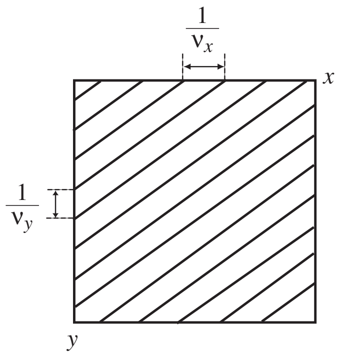


［周波数］
単位長さ（1mmとか）
の間に
何周期の波が入っているか

［波長］
波が1周期進むのにかかる
長さはどれだけか

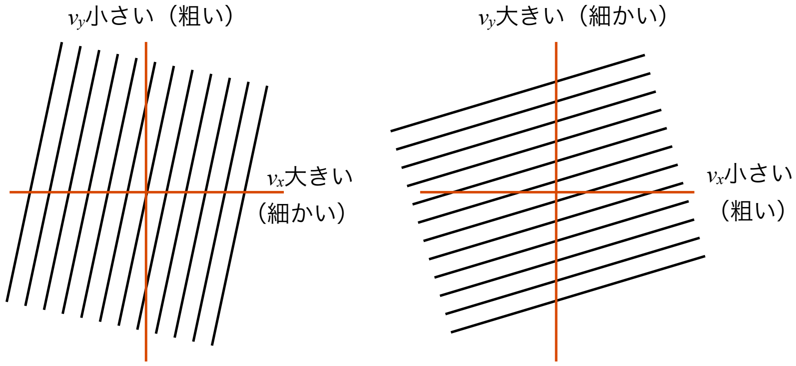
空間周波数

平面上の「明暗の波」の細かさを表す
単位長さの中で明暗が何回繰り返すか



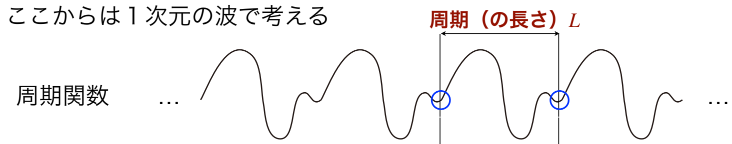
x方向・y方向の２つの空間周波数の組で，ひとつの平面上の波が定まる

空間周波数

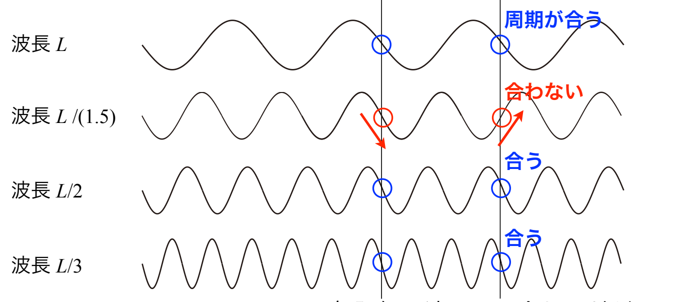


周期関数を分解

ここからは１次元の波で考える



もしこの周期関数が，三角関数の和で書けるとしたら？足されるのは



… 足されるのは波長 L/nのものに限る。

無限個の波の足し合わせだが，
足し算（級数）で書ける。

波長 L / n の波

L / n　波長

n / L　単位長さあたり
何周期ぶんの波が入っているか
[周波数]

三角関数を使うときは，角度を単位にしなければいけない

2π(n / L)　単位長さあたり
位相（角度）が何ラジアン進むか
[角周波数]

三角関数と指数関数

オイラーの式　$\exp(i\omega) = \cos\omega + i\sin\omega$

↓

$$\cos\omega = \frac{\exp(i\omega) + \exp(-i\omega)}{2}, \quad \sin\omega = \frac{\exp(i\omega) - \exp(-i\omega)}{2i}$$

ひとつの三角関数＝波は，
正負の周波数をもつ指数関数の組

それを理解したうえで，
ひとつの指数関数で
波を表すことにする

指数関数のほうが
計算が簡単だから。

周期関数を指数関数の和で

波長 L / n の波　　$\exp(i2\pi \frac{n}{L}x)$

周期 L の周期関数 $f(x)$ は,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi\frac{n}{L}x\right)$$

と書ける　はず。

書ける，のはいいが

周期 L の周期関数 $f(x)$ は,

波長 L / n の波

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi\frac{n}{L}x\right)$$

と書ける　はず。

この係数はどうやって
求めるの？

ある波長の波を切り出す

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi\frac{n}{L}x\right)$$

から，波長 L / nの波だけを
切り出したい

波長 L / nの波　$\exp\left(i2\pi\frac{n}{L}x\right)$

一方，$f(x)$ を構成する波のひとつ（波長 L / m）は

$$\exp\left(i2\pi\frac{m}{L}x\right)$$

ある波長の波を切り出す

波長 L / m の波と L / n の波について
こういう計算をしてみる

$f(x)$ の 1 周期分だけ積分（積分については次回）

複素共役

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \underbrace{\exp\left(i2\pi\frac{m}{L}x\right)}_{\text{波長 } L/m \text{ の波}} \underbrace{\exp\left(-i2\pi\frac{n}{L}x\right)}_{\text{波長 } L/n \text{ の波}} dx$$

この答は　mとn が異なるとき（別の波長の波）　0
　　　　　mとn が等しいとき（同じ波長の波）　L

指数関数のグループはこの性質をもつ　直交関数系

フーリエ級数展開とフーリエ係数

ある整数

そこで $\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)\exp\left(-i2\pi\frac{k}{L}x\right)dx$ を計算してみる

$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi\frac{n}{L}x\right)$ なので

$$\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi\frac{n}{L}x\right)\exp\left(-i2\pi\frac{k}{L}x\right)dx$$

級数の各項を積分すると，$n = k$ の項だけは積分すると　L

他の項は積分すると　0

つまりこの積分の答は $\frac{1}{L}\cdot La_k = a_k$　係数が求まった

フーリエ級数展開とフーリエ係数

周期 L の周期関数 $f(x)$ は,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi\frac{n}{L}x\right)$$

という波の足し合わせ（級数）で表される
（フーリエ級数展開）

係数 a_n（フーリエ係数）は

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)\exp\left(-i2\pi\frac{n}{L}x\right)dx$$

という積分で表される