2016年度秋学期 画像情報処理 第3回 フーリエ変換とサンプリング定理

> 浅野 晃 関西大学総合情報学部



周期関数は、フーリエ級数で表される

周期 *L* の 周期関数 ... f(x) ...

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L}x\right)$$

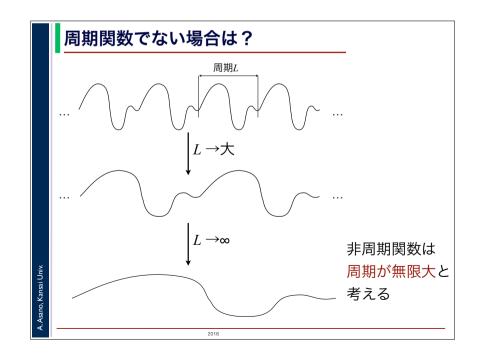
という波の足し合わせ(級数)で表される

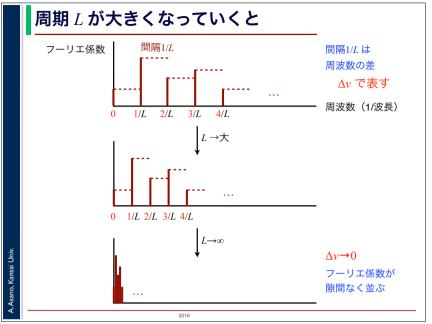
(フーリエ級数展開)

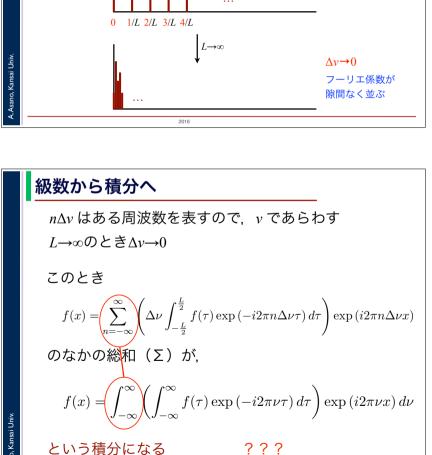
係数 a_k (フーリエ係数) は

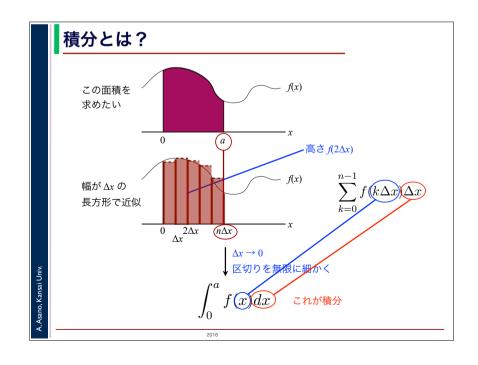
$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \exp\left(-i2\pi \frac{k}{L}x\right) dx$$











級数から積分へ

 $n\Delta v$ はある周波数を表すので、v であらわす $L
ightarrow \infty$ のとき $\Delta v
ightarrow 0$

このとき

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\Delta \nu \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(\tau) \exp\left(-i2\pi n \Delta \nu \tau\right) d\tau \right) \exp\left(i2\pi n \Delta \nu x\right)$$

のなかの総和(Σ)が,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp\left(-i2\pi\nu \tau\right) d\tau \right) \exp\left(i2\pi\nu x\right) d\nu$$

という積分になる

!!!

2016

フーリエ変換

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i2\pi\nu x) dx$$
 フーリエ変換

関数 f(x) に、どのような周波数の波がどれだけ 含まれているか

フーリエ係数の並びが、周波数の間隔がどんどん小さくなって、ついにはひとつの関数 F(v) になる

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) \exp(i2\pi x \nu) d\nu$$
 逆フーリエ変換

周波数v の波 $\exp(i2\pi xv)$ に、対応するフーリエ係数 F(v) をかけたものを合計(積分)すると、 f(x) に戻る

フーリエ変換

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-i2\pi\nu\tau) d\tau} \right) \exp(i2\pi\nu x) d\nu \quad \stackrel{\text{\text{fe}}}{\sim}$$

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i2\pi\nu x) dx$$

と分けて書く

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) \exp(i2\pi x\nu) d\nu$$

フーリエ変換対 という

2016

2次元の場合は

1次元のフーリエ変換 $F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i2\pi\nu x) dx$

2次元のフーリエ変換

$$F(\nu_x, \nu_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp\{-i2\pi(\nu_x x + \nu_y y)\} dx dy$$

この式は、x, y それぞれに 1 次元のフーリエ変換をしたことになっている

$$F(\nu_x, \nu_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-i2\pi\nu_x x) dx \right] \exp(-i2\pi\nu_y y) dy$$

注 : $\exp(a+b) = \exp(a) \exp(b)$

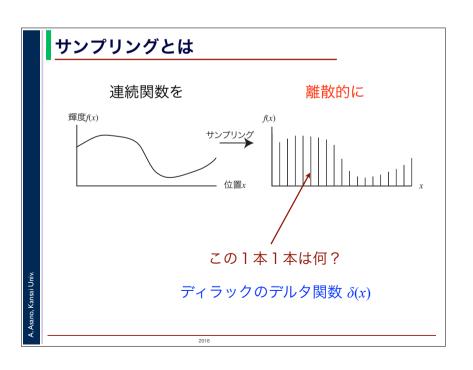
Asano, Kansai

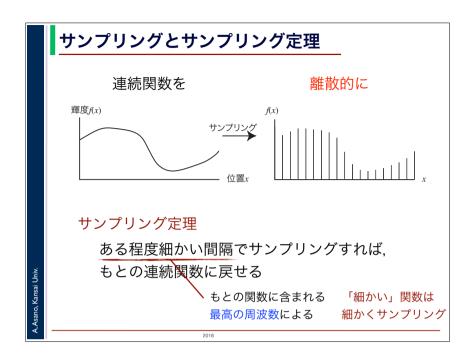
2016

2016

eano Kaneai Univ

サンプリングとサンプリング定理





ディラックのデルタ関数 $\delta(x)$

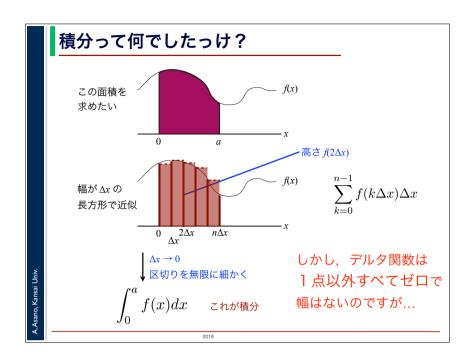
$$\delta(x) = 0 \ (x \neq 0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

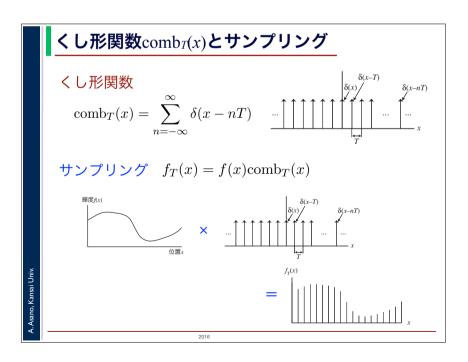
すべてゼロ

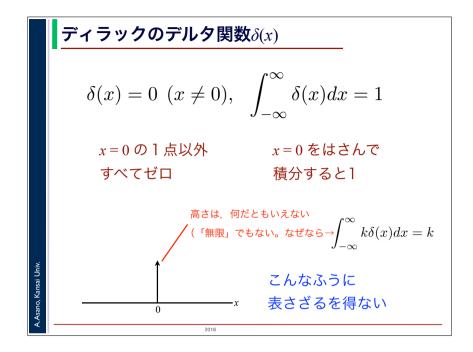
x=0 の 1 点以外 x=0 をはさんで

積分すると1

何ですかこれ??



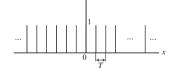




こんなややこしい関数でなければいけないの?

ディラックのデルタ関数ではなく, これを並べて くし形関数にしてはだめ?

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$



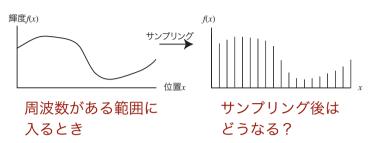
だめです。

こっちの関数は、幅がなくて高さ1だから、 積分したらゼロ→画像の輝度の合計がゼロのはずはない

ディラックのデルタ関数は、幅がないのに積分したら1 というヘンな関数(超関数)

いプペノな民奴(起席

サンプリングされたら、周波数の範囲は?



 $f_T(x)$ のフーリエ変換を求める

$$f_T(x) = f(x) ext{comb}_T(x)$$
 2つの関数のかけ算のフーリエ変換は?

2016

サンプリングされた関数のフーリエ変換

つまり

$$FT[f_T(x)](\nu) = FT[f(x)](\nu) * FT[\text{comb}_T(x)](\nu)$$

サンプリングされたもとの関数のフーくし形関数のフー関数のフーリエ変換リエ変換とリエ変換の

コンヴォリューション

くし形関数のフーリエ変換は

$$FT[\operatorname{comb}_T(x)](\nu) = \frac{1}{T}\operatorname{comb}_{1/T}(\nu)$$

くし形関数のフーリエ変換はくし形関数, ただし間隔が逆数

2016

かけ算のフーリエ変換

こうなります

$$FT[f(x)g(x)](\nu) = FT[f(x)](\nu) * FT[g(x)](\nu)$$
 かけ算のフーリエ変換 フーリエ変換と フーリエ変換の ? ? ? ?

*は、コンヴォリューション(畳み込み)といいます

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(t-y)dy$$

その意味は、少し後で…

2016

くし形関数とのコンヴォリューション

つまり

$$FT[f_T(x)](\nu) = \frac{1}{T} \{ FT[f(x)](\nu) * comb_{1/T}(\nu) \}$$

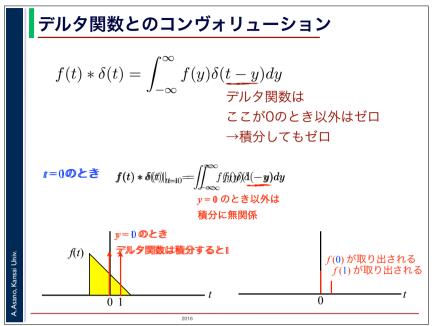
サンプリングされた 関数のフーリエ変換 もとの関数のフー くし形関数の

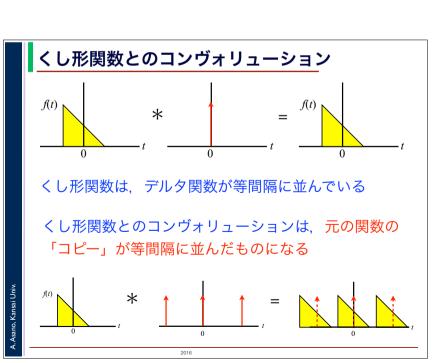
リエ変換と

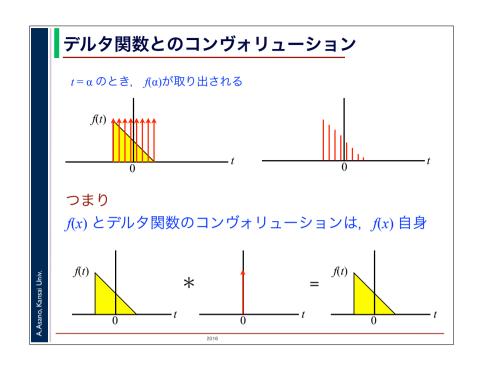
コンヴォリューション

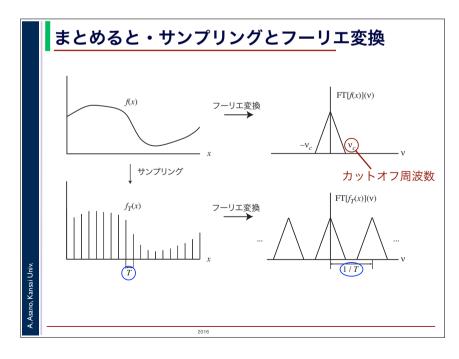
「くし形関数とのコンヴォリューション」とは?

「デルタ関数とのコンヴォリューション」を 並べたもの

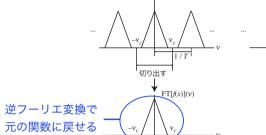








周波数空間での間隔



 $FT[f_T(x)](v)$

(a) $2v_c \le 1 / T$

サンプリング間隔が、 カットオフ周波数に比べて 十分に細かければ (b) $2v_c > 1 / T$

 $FT[f_T(x)](v)$

サンプリング間隔が粗いと、 周波数空間で重なり合ってしまい元には戻せない (エイリアジング)

201

サンプリング定理

ある関数(画像でも、音声でも)を、それのもつ 最大の周波数の2倍以上の細かさでサンプリング しておけば、

サンプリングされたもの(ディジタル画像,ディジタル音声)から元の関数を再現できる

例) CDはサンプリング周波数が44.1kHz →22.05kHzまでの音声が記録できる (録音時に、それ以上の周波数の成分が 入らないようにしなければならない)

sano, Kansai Un