

2016年度秋学期 画像情報処理 第7回 主成分分析とKarhunen-Loève変換

浅野 晃
関西大学総合情報学部

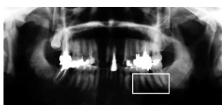


画像情報圧縮

画像情報圧縮の必要性



この画像では、1画素の明るさを0~255の整数で表す
1画素に、2進数8桁 = 8ビット = 1バイト必要
500万画素のデジカメの画像は、約5メガバイト必要



こういう画像は、1画素 = 16ビットで、
2倍の10メガバイト必要なこともある



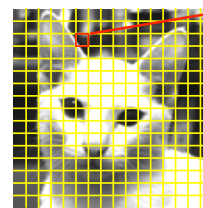
カラー画像ならば、3倍の15メガバイト必要

動画ならば、(1/30)秒でこれだけのデータ量！

JPEG方式による画像圧縮

画像を波の重ね合わせで表わし、
一部を省略して、データ量を減らす

8×8ピクセルずつの
セルに分解



ひとつのセルを、
これらの波の重ね合わせで表す

(著作権の問題により画像をはずしました)

細かい部分は、どの画像でも大してかわ
らないから、省略しても気づかない

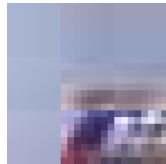
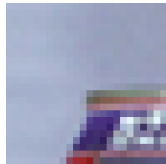
省略すると、データ量が減る

画像情報圧縮の例

データ量：80KB



データ量：16KB



(8×8ピクセルのセルが見える)

2016年度秋学期 画像情報処理

ところで、本当に「波」でいいんですか？

まあ、結局「波」でいいんですけどね...

もっと根本的な原理から説明します。

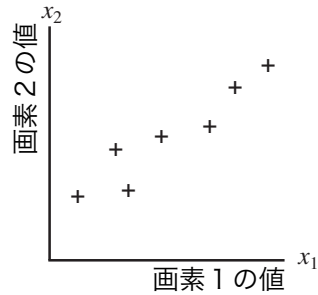
「主成分分析」と「直交変換」

主成分分析

重要な成分と、そうでない成分

しばらく、画素が2つしかない画像を考える

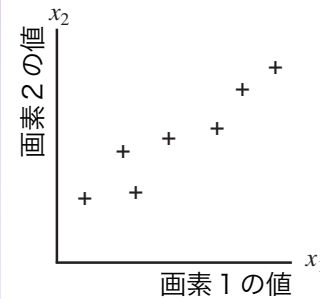
たくさんの2画素画像を考える



ひとつの2画素画像は、この図の1つの点で表される

(散布図という)

どちらかの画素値を省略できるか？

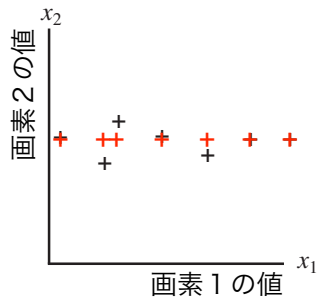


たくさんの2画素画像がこんなふうに散らばって(分布して)いたら

各画像の違いを表現するには、どちらの画素も省略することはできない

どちらの画素値の分散も大きい

こんな分布なら



画素2の値は、どの画像でもあまり変わらない(分散が小さい)

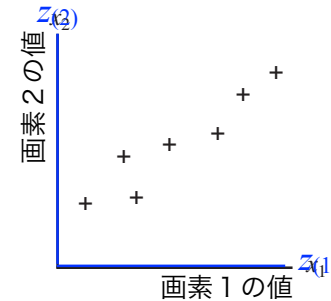
各画像の違いを表現するのに、画素2はそれほど必要ない

画素2の値は、それらの平均に置きかえてしまってもそれほど変わらない

画素2の値はいちいち記録しなくてもいいから、データ量が半分に減る

そういう都合のいい分布に変換できないの？

散布図上である方向に広がっているなら(x_1, x_2 に相関があるなら)できます。こうすればいい



x_1, x_2 を回転して、新たに $z(1), z(2)$ とすればよい

$z(1)$ の分散がもっとも大きくなるように回転する

これをするのが主成分分析

主成分分析

x_1, x_2 から次の式で z を求めるものとし、
 z の分散 $V(z)$ が最大になる a_1, a_2 を求める

$$z = a_1 x_1 + a_2 x_2$$

$V(z)$ を求めるために、次の量を用いる

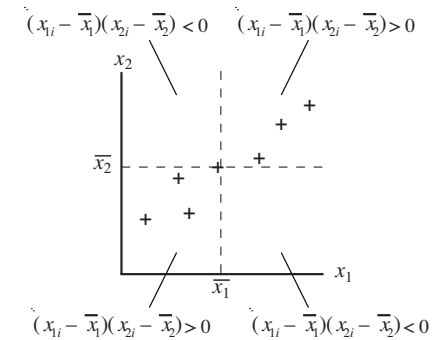
x_{1i}, x_{2i} n 枚中の i 番目の画像の, x_1, x_2 の値

\bar{x}_1, \bar{x}_2 , x_1, x_2 の全画像にわたる平均

s_{11}, s_{22} : x_1, x_2 の分散

共分散とは

$$s_{12} = s_{21} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2) \quad x_1, x_2 \text{ の共分散}$$



共分散の正負
= 相関の正負

(共分散を
 x_1, x_2 の標準偏差で
割ったものが
相関係数)

さて、 z の分散 $V(z)$ は

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2 \\ &= a_1^2 s_{11} + 2a_1 a_2 s_{12} + a_2^2 s_{22} \quad (3) \text{式} \end{aligned}$$

$V(z)$ が最大になる a_1, a_2 を求める

x から z への変換は「回転」

(伸び縮みしない) $\rightarrow a_1^2 + a_2^2 = 1$

Lagrange の未定乗数法

$$V(z) = a_1^2 s_{11} + 2a_1 a_2 s_{12} + a_2^2 s_{22} \quad \text{を}$$

$$a_1^2 + a_2^2 = 1 \quad \text{という条件で最大化する}$$



条件なしで

$$F(a_1, a_2, \lambda) = a_1^2 s_{11} + 2a_1 a_2 s_{12} + a_2^2 s_{22} - \lambda (a_1^2 + a_2^2 - 1)$$

を最大化する

未定乗数

条件をみれば
ここは 0

Lagrangeの未定乗数法

$$F(a_1, a_2, \lambda) = a_1^2 s_{11} + 2a_1 a_2 s_{12} + a_2^2 s_{22} - \lambda(a_1^2 + a_2^2 - 1)$$

を a_1, a_2, λ で偏微分して0とおく

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = 2a_1 s_{11} + 2a_2 s_{12} - 2a_1 \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_2} = 2a_2 s_{22} + 2a_1 s_{12} - 2a_2 \lambda = 0 \quad \text{偏微分って?}$$

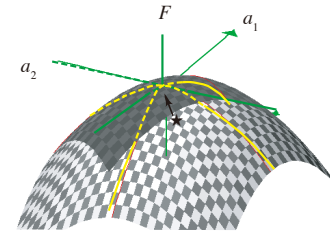
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -\lambda(a_1^2 + a_2^2 - 1) = 0$$

すでに満たされている

偏微分と最大化

偏微分：

多変数関数を，その中のひとつの変数で微分



★では， a_1, a_2 のどちらによる偏微分も0

→ a_1, a_2 のどちらの方向の接線の傾きも0

→ 曲面の「頂点」であり， F は最大

固有値問題

$$\begin{aligned} a_1 s_{11} + a_2 s_{12} &= a_1 \lambda \\ a_2 s_{22} + a_1 s_{12} &= a_2 \lambda \end{aligned} \quad \text{が得られる}$$

行列でかくと

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

分散共分散行列

固有ベクトル 固有値

固有値・固有ベクトルを求める問題を「固有値問題」という（解き方は略）

結局 $V(z)$ は

$$\begin{aligned} a_1 s_{11} + a_2 s_{12} &= a_1 \lambda \\ a_2 s_{22} + a_1 s_{12} &= a_2 \lambda \end{aligned} \quad \text{より}$$

$$a_1^2 s_{11} + a_1 a_2 s_{12} = \lambda a_1^2$$

$$a_1 a_2 s_{12} + a_2^2 s_{22} = \lambda a_2^2$$

$$\frac{a_1^2 s_{11} + 2a_1 a_2 s_{12} + a_2^2 s_{22}}{V(z)} = \frac{\lambda(a_1^2 + a_2^2)}{1}$$

つまり $V(z) = \lambda$

第1主成分

固有ベクトル $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$
固有値 λ が2組得られる

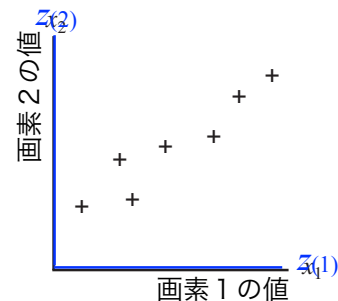
$V(z) = \lambda$ だから,

大きい方の λ ($\lambda_{(1)}$ とする) に対応する
固有ベクトル $\begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix}$ を使って
求めた z ($z_{(1)}$ とする) が, **求めたかった z**

第1主成分という

主成分分析と直交変換

このとき $z_{(1)}$ と $z_{(2)}$ は無相関



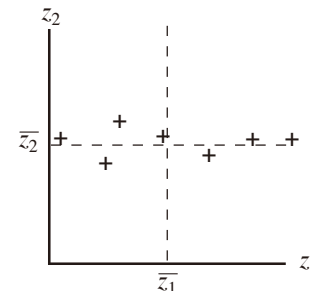
x_1, x_2 を回転して, 新たに
 $z_{(1)}, z_{(2)}$ とする

$z_{(1)}$ の分散がもっとも大き
くなるように回転する

$z_{(1)}, z_{(2)}$ は無相関。
なぜなら

相関がないときは

相関がない $\rightarrow (z_{1i} - \bar{z}_1)(z_{2i} - \bar{z}_2)$ の正負がつかう



共分散 = 0

$z_{(1)}, z_{(2)}$ はこうなっている
 \rightarrow 本当?

主成分分析と分散共分散行列

固有値のうち、大きい方を $\lambda_{(1)}$ 、小さい方を $\lambda_{(2)}$

対応する固有ベクトル $\begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix}$

これらは

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix} = \lambda_{(1)} \begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix} = \lambda_{(2)} \begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix} \text{ をみたく}$$

分散共分散行列の対角化

まとめると

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} \end{pmatrix}$$

つまり $SP = P\Lambda$

すなわち $\Lambda = P^{-1}SP$, $S = P\Lambda P^{-1}$

(分散共分散行列の) 対角化という

対称行列の対角化

分散共分散行列 S は $\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$ $s_{12} = s_{21}$
対称行列 共分散

対称行列の固有ベクトルは直交する (詳細略)

P は直交行列 $\begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix}$

直交行列の逆行列は転置行列 (逆回転)

すなわち $S = P\Lambda P'$

対角化の意味

$S = P\Lambda P'$
分散 共分散行列は P' で変換し
そこでは分散共分散行列が Λ で
 P で戻る
「この世」 「あの世」

$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} \end{pmatrix}$ あの世では
共分散が 0
→ 相関がない

P' で変換された「あの世」とは？

$$z_{(1)} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{だから}$$

$$z_{(2)} = \begin{pmatrix} a_{1(2)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} \\ a_{1(2)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{これが } P'$$

直交行列で変換するから
直交変換という

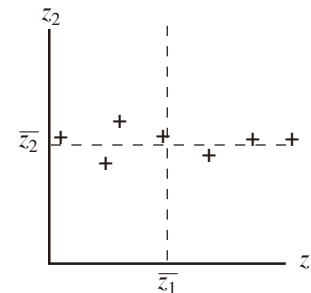
つまり、 x から z に変換すると、

$z_{(1)}$ と $z_{(2)}$ の共分散が 0

→ 相関がない

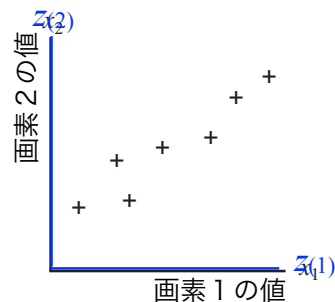
相関がないときは

相関がない → $(z_{1i} - \bar{z}_1)(z_{2i} - \bar{z}_2)$ の正負がつりあう



共分散 = 0

たしかに $z_{(1)}$ と $z_{(2)}$ は無相関



x_1, x_2 を回転して、新たに $z_{(1)}, z_{(2)}$ とする

$z_{(1)}$ の分散がもっとも大きくなるように回転する

たしかに

$z_{(1)}, z_{(2)}$ は無相関

画素が p 個あっても同じ

x から z への、 P' による直交変換

$$\begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \\ \vdots \\ z_{(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} & \cdots & a_{p(1)} \\ a_{1(2)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{p(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1(p)} & a_{2(p)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = P' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

P は固有値問題の解

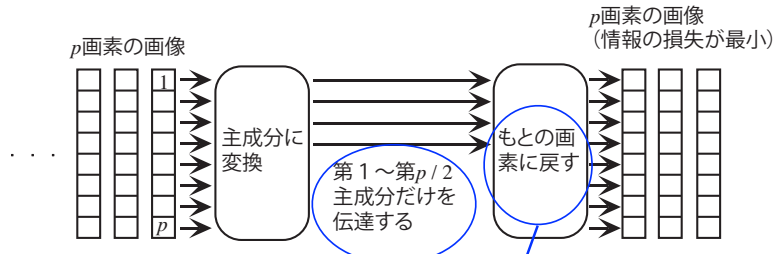
分散共分散行列 S

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$$

$$S \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & & & 0 \\ & \lambda_{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{(p)} \end{pmatrix}$$

Karhunen-Loève変換 (KL変換)

画像を主成分に変換してから伝送する



データ量が半分でも もどすときは、
情報の損失は最小

Karhunen-Loève変換 (KL変換)

もどすときは

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \simeq (P')^{-1} \begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \\ \vdots \\ z_{(p/2)} \\ z_{(p/2+1)} \\ \vdots \\ \bar{z}_{(p)} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \\ \vdots \\ z_{(p/2)} \\ z_{(p/2+1)} \\ \vdots \\ \bar{z}_{(p)} \end{pmatrix}$$

伝送されてこなかった主成分は、
平均におきかえておく

KL変換の大問題

主成分を求めるには、
分散共分散行列が必要

分散共分散行列を求めるには、
「いまから取り扱うすべての画像」が
事前にわかっていないといけない

そんなことは不可能。

つづきは

分散共分散行列がわからないから、
どういう直交変換をしたらいいかもわからない

経験的にうまくいく直交変換を行う

画像をベクトルではなく、2次元のまま行列で表して
「行列の直交変換」を考え、
直交変換のようすが目に見えるようにする。

適切な直交変換を選ぶ (実は結局フーリエ変換)