

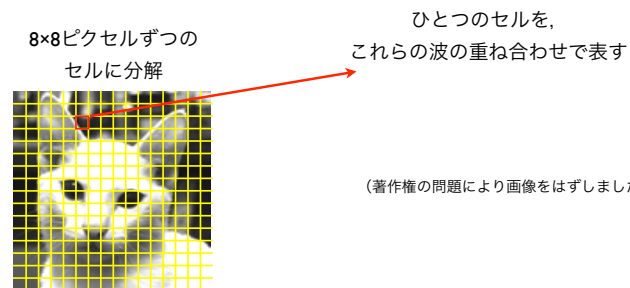
2016年度秋学期 画像情報処理 第9回 離散フーリエ変換と離散コサイン変換

浅野 晃
関西大学総合情報学部



JPEG方式による画像圧縮

画像を波の重ね合わせで表わし、
一部を省略して、データ量を減らす



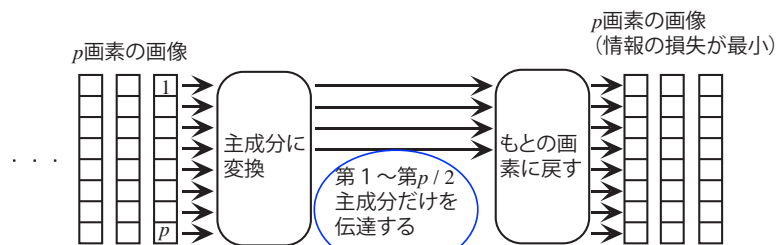
(著作権の問題により画像をはずしました)

細かい部分は、どの画像でも大してかわらないから、省略しても気づかない
省略すると、データ量が減る

2016年度秋学期 画像情報処理

Karhunen-Loève変換 (KL変換)

画像を主成分に変換してから伝送する



データ量が半分でも
情報の損失は最小

2016年度秋学期 画像情報処理

KL変換の大問題

主成分を求めるには、
分散共分散行列が必要

分散共分散行列を求めるには、
「いまから取り扱うすべての画像」が
事前にわかっているといけない

そんなことは不可能。

2016年度秋学期 画像情報処理

そこで

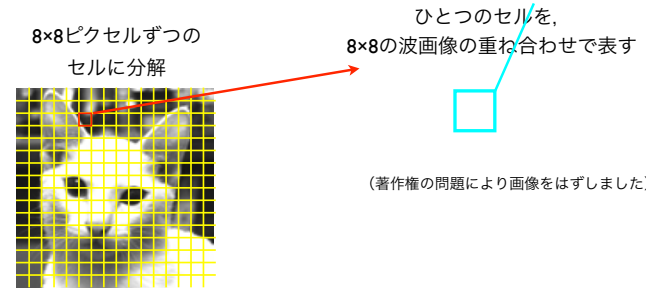
ベクトルの直交変換を、行列の直交変換におきかえて、**どういふ変換か見えるようにする**

原画像 X は、 m^2 個の**基底画像**にそれぞれ
変換後画像 Z の各要素をかけて足し合わせたもの
になっている

JPEG方式による画像圧縮

画像を**波**の重ね合わせで表わし、
一部を省略して、データ量を減らす

波画像のひと
つひとつが
基底画像



細かい部分は、どの画像でも大してかわ
らないから、省略しても気づかない
省略すると、データ量が減る

そこで

ベクトルの直交変換を、行列の直交変換におきかえて、**どういふ変換か見えるようにする**

原画像 X は、 m^2 個の**基底画像**にそれぞれ
変換後画像 Z の各要素をかけて足し合わせたもの
になっている

どういふ直交変換（ユニタリー変換）を用いるかを、
基底画像を目でみて決める

波の基底画像を用いる→**フーリエ変換**

離散フーリエ変換を行列で

2次元フーリエ変換

$$F(\nu_x, \nu_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp\{-i2\pi(\nu_x x + \nu_y y)\} dx dy$$

指数関数の性質から

$$\begin{aligned} F(\nu_x, \nu_y) &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-i2\pi\nu_x x) \exp(-i2\pi\nu_y y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-i2\pi\nu_x x) dx \right] \exp(-i2\pi\nu_y y) dy \end{aligned}$$

x 方向のフーリエ変換 y 方向の
フーリエ変換

2次元フーリエ変換は分離可能

2次元離散フーリエ変換

1次元離散フーリエ変換

$$U(k) = \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \exp(-i2\pi \frac{k}{N} n) \quad (k = 0, 1, \dots, N-1)$$

2次元離散フーリエ変換 (分離可能な形式)

$$U(k, l) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{M-1} u(m, n) \exp(-i2\pi \frac{k}{M} m) \right] \exp(-i2\pi \frac{l}{N} n)$$

縦横の大きさが同じなら

$$U(k, l) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} u(m, n) \exp(-i2\pi \frac{k}{N} m) \right] \exp(-i2\pi \frac{l}{N} n)$$

離散フーリエ変換を行列で表す

行列の直交変換の形で表す $Z = RXR'$

$$U(k, l) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} u(m, n) \exp(-i2\pi \frac{k}{N} m) \right] \exp(-i2\pi \frac{l}{N} n)$$

↓

$$\downarrow (Z = U(k, l)) = \downarrow (R) \cdot \downarrow (X = u(m, n)) \cdot \downarrow (R')$$

離散フーリエ変換を行列で表す

前ページのように行列を配置すると

$$R' = \begin{pmatrix} e^{-i2\pi \frac{0}{N} 0} & \dots & e^{-i2\pi \frac{k}{N} 0} & \dots & e^{-i2\pi \frac{N-1}{N} 0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-i2\pi \frac{0}{N} m} & & e^{-i2\pi \frac{k}{N} m} & & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-i2\pi \frac{0}{N} (N-1)} & & & & e^{-i2\pi \frac{N-1}{N} (N-1)} \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} e^{-i2\pi \frac{0}{N} 0} & \dots & e^{-i2\pi \frac{0}{N} n} & \dots & e^{-i2\pi \frac{0}{N} (N-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-i2\pi \frac{l}{N} 0} & & e^{-i2\pi \frac{l}{N} n} & & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-i2\pi \frac{N-1}{N} 0} & & & & e^{-i2\pi \frac{N-1}{N} (N-1)} \end{pmatrix}$$

離散フーリエ変換を行列で表す

指数関数がややこしいので

$$W_N = \exp\left(-\frac{i2\pi}{N}\right)$$

とおくと,

$$R = \begin{pmatrix} W_N^{0 \cdot 0} & \cdots & W_N^{0 \cdot n} & \cdots & W_N^{0 \cdot (N-1)} \\ \vdots & & \ddots & & \\ W_N^{l \cdot 0} & & & & W_N^{l \cdot n} \\ \vdots & & & \ddots & \\ W_N^{(N-1) \cdot 0} & & & & W_N^{(N-1) \cdot (N-1)} \end{pmatrix}$$

$$Z = R X R$$

2016年度秋学期 画像情報処理

ところで、本当にユニタリー？

ある列と、ある列の複素共役の内積

異なる列なら 0, 同じ列なら 1 ならユニタリー

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{N-1} W_N^{ln} \cdot (W_N^{ln'})^* &= \sum_{l=0}^{N-1} \exp\left(-\frac{i2\pi ln}{N}\right) \exp\left(\frac{i2\pi ln'}{N}\right) \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} \exp\left(-\frac{i\{(n-n')2\pi\}l}{N}\right) \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} W_N^{(n-n')l} \end{aligned}$$

異なる列 (等比数列の和)

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{N-1} W_N^{(n-n')l} &= \frac{1 - W_N^{(n-n')N}}{1 - W_N^{(n-n')}} \\ &= \frac{1 - (W_N^N)^{(n-n')}}{1 - W_N^{(n-n')}} \\ &= \frac{1 - 1^{(n-n')}}{1 - W_N^{(n-n')}} = 0 \quad \text{OK} \end{aligned}$$

同じ列

$$\sum_{l=0}^{N-1} W_N^{(n-n')l} = \sum_{l=0}^{N-1} 1 = N \quad \text{NG}$$

2016年度秋学期 画像情報処理

ユニタリー離散フーリエ変換

前ページの計算で $RR'^* = NI$

$$W_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(-\frac{i2\pi}{N}\right) \quad \text{とおけば}$$

$RR'^* = I$ となって、ユニタリーになる

$$Z = R X R$$

$$X = R^* Z R$$

2016年度秋学期 画像情報処理

離散コサイン変換

フーリエ変換では、複素数を扱う必要がある

実数だけで計算できる変換

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} n \rightarrow \\ \vdots \end{matrix} \\ \begin{matrix} l \downarrow \\ \vdots \end{matrix} & \begin{pmatrix} & & & \\ & r(n, l) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$r(n, l) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}} & l = 0 \\ \frac{2}{\sqrt{N}} \cos \frac{(2n+1)l\pi}{2N} & l \neq 0 \end{cases}$$

2016年度秋学期 画像情報処理

偶関数のフーリエ変換

離散コサイン変換は、関数を折り返して偶関数にしたもののフーリエ変換に相当

偶関数 $f(x) = f(-x)$ のフーリエ変換

$$\begin{aligned} F(\nu_x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\{-i2\pi(\nu_x x)\} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 f(x) \exp\{-i2\pi(\nu_x x)\} dx + \int_0^{\infty} f(x) \exp\{-i2\pi(\nu_x x)\} dx \end{aligned}$$

第1項の x を $-x$ に変数変換

$$F(\nu_x) = \left(\int_0^{\infty} f(-x) \exp\{-i2\pi(\nu_x (-x))\} (-dx) \right) + \int_0^{\infty} f(x) \exp\{-i2\pi(\nu_x x)\} dx$$

偶関数のフーリエ変換

整理すると

$$F(\nu_x) = \int_0^{\infty} f(x) \exp\{i2\pi(\nu_x x)\} dx + \int_0^{\infty} f(x) \exp\{-i2\pi(\nu_x x)\} dx$$

$$F(\nu_x) = \int_0^{\infty} f(x) [\exp\{i2\pi(\nu_x x)\} + \exp\{-i2\pi(\nu_x x)\}] dx$$

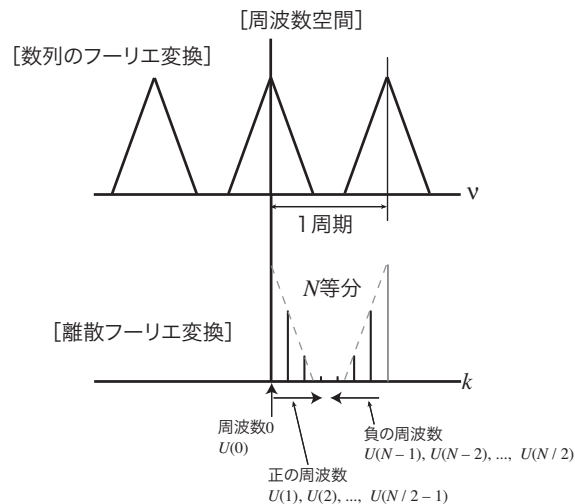
指数関数と三角関数の関係から

$$F(\nu_x) = 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos 2\pi(\nu_x x) dx$$

実数の計算になる

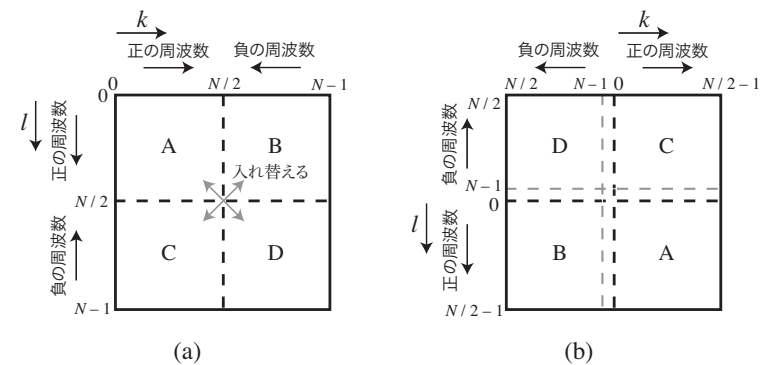
離散フーリエ変換と正負の周波数

1次元



離散フーリエ変換と正負の周波数

2次元



実例

基底画像の例

(講義では, A. K. Jain, Fundamentals of Digital Image Processing (1988)に出ている基底画像の例を使って説明しました。)

コサイン変換

サイン変換

Hadamard変換(-1と1)

Haar変換

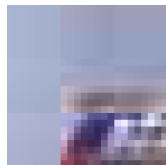
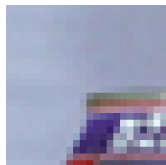
2016年度秋学期 画像情報処理

画像情報圧縮の例

データ量 : 80KB



データ量 : 16KB



(8×8 ピクセルのセルが見える)

2016年度秋学期 画像情報処理

リングング (モスキートノイズ)



2016年度秋学期 画像情報処理