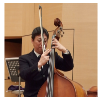
2016年度秋学期　画像情報処理　第１２回

画像フィルタとフィルタ定理

浅野　晃
関西大学総合情報学部



フィルタ定理

フィルタとは

フィルタ＝濾過器

何かを投入すると
一定の作用を及ぼして
出力する

画像処理におけるフィルタ

画像の各画素について,その画素および近傍の画素とでなんらかの演算を行なって,その結果で各画素を置き換える

各画素の輝度を上げる（あまりフィルタとはいわない）

ぼかし＝近傍の画素との平均

輪郭強調＝近傍の画素との差を増強

モルフォロジにおけるフィルタ

フィルタ　図形

移動不変性
(translation-invariance)

$$\Psi(X_b) = [\Psi(X)]_b$$

移動

移動してからフィルタを適用するのと，
フィルタを適用してから移動するのとが同じ

移動不変でない
（背景だけぼかし）

モルフォロジにおけるフィルタ

増加性
(increasingness)

$$X \subset Y \Rightarrow \Psi(X) \subset \Psi(Y)$$

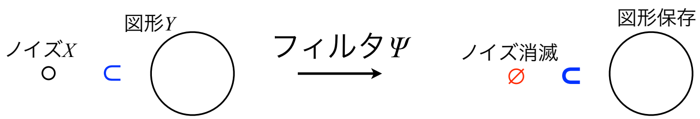
フィルタを適用する前後で
包含関係が保たれる

ノイズ除去を例にすると
ノイズ画素は，意味のある図形に比べて小さい→
図形を残してノイズを除去→増加的
ノイズを残して図形を消去→増加的でない

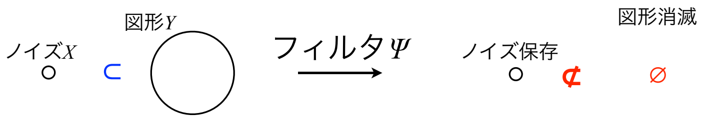
増加的フィルタとノイズ除去

ノイズ除去を例にすると
ノイズ画素は，意味のある図形に比べて小さい→

図形を残してノイズを除去→増加的



ノイズを残して図形を消去→増加的でない



モルフォロジにおけるフィルタ

狭義のモルフォロジカルフィルタは，さらに

べき等性
(idempotence)

$$\Psi[\Psi(X)] = \Psi(X)$$

フィルタを１回適用すれば，
それ以上何度適用しても同じ

オープニング・クロージングは
もっとも基本的な（狭義の）モルフォロジカルフィルタ

フィルタ定理

移動不変で増加的なフィルタは，どんなフィルタでも，
なんらかの構造要素群による
エロージョンをORで組み合わせることで表せる

$$\Psi(X) = \bigcup_{B \in \mathrm{Ker}[\Psi]} X \ominus \check{B}$$

$$\mathrm{Ker}[\Psi] = \{X \mid 0 \in \Psi(X)\}.$$

フィルタの核(kernel)

原点

事実上，
入力として可能な図形
すべて

A. Asano, Kansai Univ.

フィルタ定理の証明

[1]　$\Psi(X) \supseteq \bigcup_{B \in \mathrm{Ker}[\Psi]} X \ominus \check{B}$　を証明する

Ker[Ψ]に含まれるBについて

$X \ominus \check{B}$ に含まれる画素hを考える

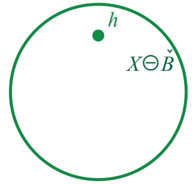
$$X \ominus \check{B} = \{x | B_x \subseteq X\}$$

$$\downarrow$$

$$B_h \subseteq X$$

$$\downarrow$$

$$B \subseteq X_{-h}$$



A. Asano, Kansai Univ.

フィルタ定理の証明

一方　BはKer[Ψ]に含まれるので

$$0 \in \Psi(B)$$

増加的

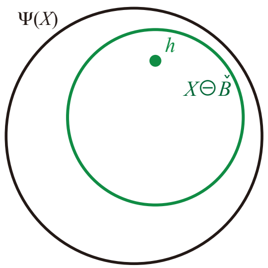
$$0 \in \Psi(X_{-h})$$

移動不変

$$h \in \Psi(X)$$

前ページ
$B \subseteq X_{-h}$

$X \ominus \check{B}$ に含まれるどのhに
ついてもなりたつ→



こうなる

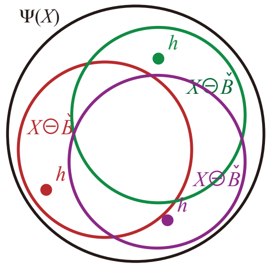
A. Asano, Kansai Univ.

フィルタ定理の証明

Ker[Ψ]に含まれる任意の構造要素Bについて

$$h \in X \ominus \check{B} \Rightarrow h \in \Psi(X)$$

こうなっている



つまり

$$\Psi(X) \supseteq \bigcup_{B \in \mathrm{Ker}[\Psi]} X \ominus \check{B}$$

A. Asano, Kansai Univ.

フィルタ定理の証明

[2] $\Psi(X) \subseteq \bigcup_{B \in \mathrm{Ker}[\Psi]} X \ominus \check{B}$ を証明する

$\Psi(X)$に含まれる任意のhについて

$h \in \Psi(X)$

移動不変

$0 \in \Psi(X_{-h})$

核の定義

$X_{-h} \in \mathrm{Ker}[\Psi]$

$X \ominus \check{X}_{-h} = \{h' \mid (X_{-h})_{h'} \subseteq X\}$
を考えると

$h' = h$
のときもなりたつ

$h \in X \ominus \check{X}_{-h}$

フィルタ定理の証明

$\Psi(X)$に含まれる任意のhについて

$X_{-h} \in \mathrm{Ker}[\Psi]$ $\qquad h \in X \ominus \check{X}_{-h}$

そこで X_{-h}をBと名付けると

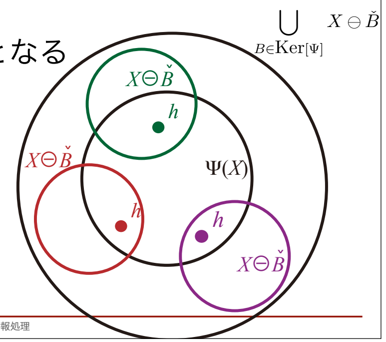
$B \in \mathrm{Ker}[\Psi]$ $\qquad h \in X \ominus \check{B}$

つまり

$h \in \Psi(X) \Rightarrow h \in X \ominus \check{B}$ となる
$B \in \mathrm{Ker}[\Psi]$ が存在する

よって

$\Psi(X) \subseteq \bigcup_{B \in \mathrm{Ker}[\Psi]} X \ominus \check{B}$



フィルタ定理の例

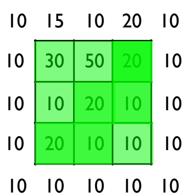
erosion→近傍内での最小値(min)

OR→最大値演算(max)

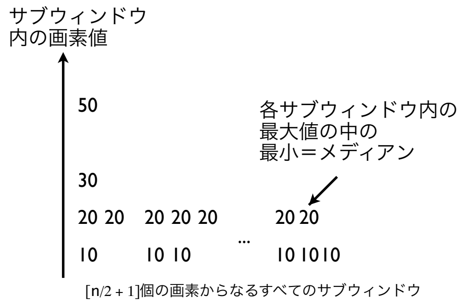
メディアンフィルタ

画像上をウィンドウが１画素ずつ移動し，各画素でウィンドウ内のメディアンを出力

ウィンドウ



[n/2 + 1]画素の
サブウィンドウ

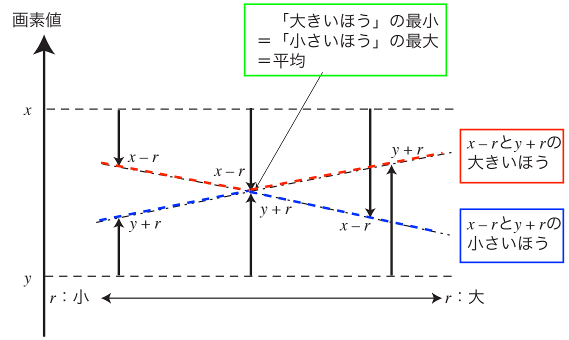


フィルタ定理の例

平均値フィルタ

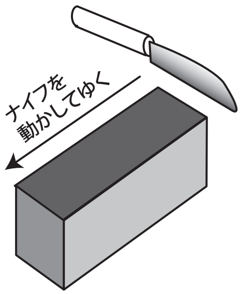
画像上をウィンドウが１画素ずつ移動し，各画素でウィンドウ内の平均値を出力

２つの値の平均を，最大と最小で表す



フィルタ定理の例

２つの値の平均を，最大と最小で



AとBの２人がケーキを分ける。
２人とも大きい方がほしい。

Aがナイフを端から動かして行き，Bが「ストップ」をかけて，ケーキを切ってAが好きな方をとる

Bの立場では，
切ったあとAは大きい方を取るだろうから，大きい方を最小にする

一般的なモルフォロジの表現 〜順序集合と束

もっとも一般的なモルフォロジの表現

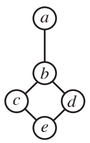
モルフォロジが定義できる集合は,
要素間の一部に順序が定義されていて（半順序集合）,

任意の要素間に「上限」と「下限」が定義されていればよい. 束(lattice)という

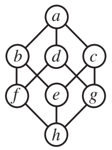
近傍内の上限→dilation，下限→erosion

束の例
(Hasse diagram)

全順序集合



c-dに順序はないが,
c-dの上限はb，下限はe



カラー画像のモルフォロジも，この考えにもとづく
（ベクトルの順位付け）