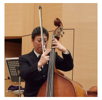
2016年度秋学期　統計学　第１３回

不確かな測定の不確かさを測る
— 不偏分散とt分布

浅野　晃
関西大学総合情報学部



ちょっと前回までの復習

正規分布の場合の区間推定

例題

母集団
(受験者全体)

母平均μ

正規分布
と仮定する

標本X1, ... Xnをとりだす
サイズn

標本平均 $\bar{X}$

母平均μの95%信頼区間が
知りたい

(説明の都合です)
母分散σ^2がわかっているものとする

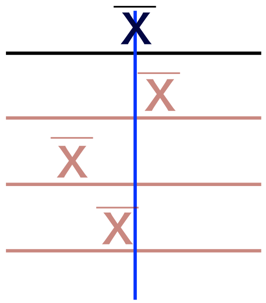
区間推定の考え方

数値をいくつか抽出して標本平均

仮に，何度も抽出したとすると

標本平均の
期待値
＝母平均

標本平均の
分散
＝母分散÷
標本サイズ



データ１個
より
ばらつきが
小さくなる

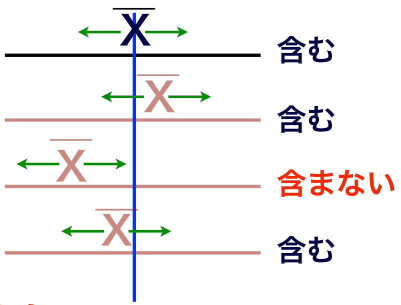
母平均（実際にはわからない）
のまわりにばらついている

区間推定の考え方

標本平均の左右に区間をつける

区間は母平均を

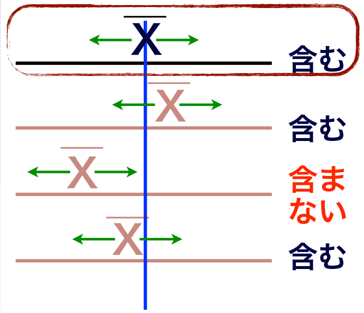
どの回の区間が
母平均を含むか・
含まないかは
わからないが



確率95%で
母平均を含むように
区間を設定できる

信頼区間

区間は母平均を



確率95%で
母平均を含むように計算した区間だから，その１回も含むと信じる

母平均の
［信頼係数］95%の
［信頼区間］　という
（［95%信頼区間］）

不偏分散

正規分布の場合の区間推定

例題

母集団
(受験者全体)

母平均μ

正規分布
と仮定する

標本X1, ... Xnをとりだす
サイズn

標本平均 $\overline{X}$

母平均μの95%信頼区間が
知りたい

(説明の都合です)
母分散σ^2がわかっているものとする

母分散は，ふつうはわからない

母集団全体は調べていないし，母平均もわからない
（わからないから，いま推定しようとしている）

それなのに，母分散がわかるはずがない

母分散の「代用品」を，標本を使って計算できないか。

標本を使って分散を計算

分散＝(偏差)^{2}の平均

（データの各数値）ー（データの平均）

標本を使って分散を計算する。

データ：　標本X1, ... Xn

データの平均：　本当は母平均だが，
わからないので
標本平均 $\bar{X}$ で代用

標本を使って分散を計算

標本を使った分散

$$S^2 = \frac{1}{n}\{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \cdots + (X_n - \bar{X})^2\}$$

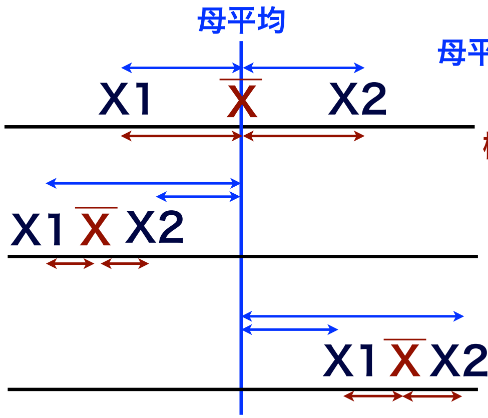
標本サイズで割る

分散＝(偏差)^{2}の平均
だから当然だけど…

本当にこれでいいの？

標本平均を用いた偏差

標本サイズ n=2 とする　標本は X1, X2

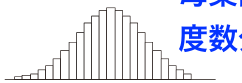


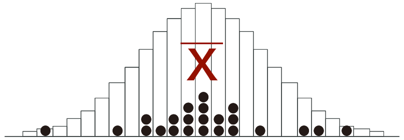
標本平均との隔たりのほうがたいてい小さい

標本平均を用いた偏差

別の説明

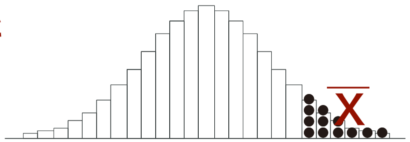
母集団の
度数分布





これなら
「標本平均との隔たり」と
「母平均との隔たり」は
かわらない

こんなふうに偏っていると
「標本平均との隔たり」
のほうが小さい



不偏分散

母平均との隔たりよりも
標本平均との隔たりのほうが
たいてい小さい

標本平均との隔たりを使って分散を計算すると，母分散よりもたいてい小さめになる

では，計算のときに少し大きめにしておけば？

不偏分散

計算のときに少し大きめにする

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left\{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \cdots + (X_n - \bar{X})^2\right\}$$

(標本サイズ − 1)で割る

これを不偏分散（不偏標本分散）といい，
母分散の代用に用いる

「不偏」とは？

「不偏」とは？

標本平均との隔たりを使って分散を計算すると，母分散よりもたいてい小さめになる

計算のときに少し大きめにすると？

母分散と一致するわけではないが
母分散より大きくも小さくも
平等にはずれる

「不偏」とは「えこひいきしない」こと

不偏分散を用いた区間推定

A. Asano, Kansai Univ.

正規分布の場合の区間推定

例題

母集団

(受験者全体)

母平均μ

正規分布

と仮定する

標本X1, ... Xnをとりだす

サイズn

標本平均 $\overline{X}$

母平均μの95%信頼区間が知りたい

(説明の都合です)

母分散σ^2がわかっているものとする

A. Asano, Kansai Univ.

正規分布の場合の区間推定

考え方

標本は，母集団分布と同じ確率分布にしたがう

正規分布N(μ, σ^2)

標本平均は，やはり正規分布にしたがうが，分散が1/nになる　［性質２］

正規分布N(μ, σ^2/n)

A. Asano, Kansai Univ.

正規分布の場合の区間推定

考え方

標本は，母集団分布と同じ確率分布にしたがう

正規分布N(μ, σ^2)

$\overline{X}$

標本平均は，やはり正規分布にしたがうが，分散が1/nになる　正規分布N(μ, σ^2/n)［性質２］

正規分布の［性質１］により

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}$$

は標準正規分布にしたがう

N(0, 1)

A. Asano, Kansai Univ.

母分散はわからない

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}$$ は標準正規分布にしたがう
N(0, 1)

本当は母分散はわからない

不偏分散で代用する

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$$ 不偏分散

何分布にしたがう？

t分布

t統計量 $t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$ は

自由度(n-1)のt分布にしたがう

t(n-1)

（「スチューデントのt分布」という）

発見者ウィリアム・ゴセットのペンネーム

この例題は

標本X1, ... Xnをとりだす
サイズn

母集団
(受験者全体)

標本平均 $\bar{X}$

母平均μ

正規分布
と仮定する

母平均μの95%信頼区間が
知りたい

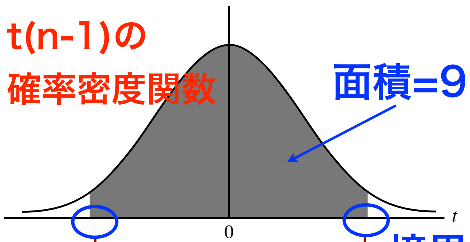
不偏分散s^2で代用

母分散σ^2がわからないので,

t分布を用いた区間推定

$t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$ は自由度(n-1)のt分布にしたがう
t(n-1)

t(n-1)の
確率密度関数



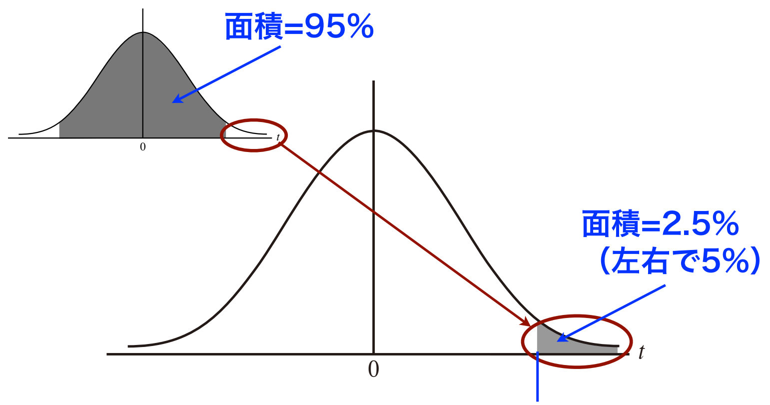
面積=95%

境界の値はいくら？

$t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$ が

この区間に入っている確率=95%とすると

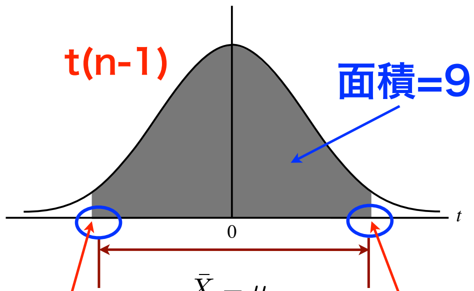
t分布を用いた区間推定



境界の値は自由度によってちがうので

$t_{0.025}$(n-1)としておく［上側2.5%点］という

t分布を用いた区間推定



$t = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{s^2/n}}$ が

この区間に入っている確率=95%

$-t_{0.025}$(n-1)　　$t_{0.025}$(n-1)

t分布を用いた区間推定

$t = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{s^2/n}}$ が $-t_{0.025}$(n-1) と $t_{0.025}$(n-1) の間に入っている確率が95%

式で書くと

$$P\left(-t_{0.025}(n-1) \leqq \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{s^2/n}} \leqq t_{0.025}(n-1)\right) = 0.95$$

μの式に直すと

$$P\left(\bar{X} - t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}} \leqq \mu \leqq \bar{X} + t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}}\right) = 0.95$$

t分布を用いた区間推定

例題では

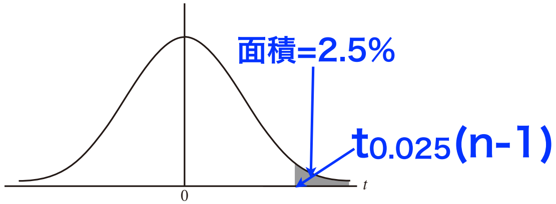
標本平均=50　不偏分散=25　標本サイズ=10

$$P\left(\bar{X} - t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}} \leqq \mu \leqq \bar{X} + t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}}\right) = 0.95$$

μの95%信頼区間の下限　　μの95%信頼区間の上限

上側2.5%点　$t_{0.025}$(n-1)　は？

t分布表



パーセントの値　0.025

自由度

	0.40	0.30	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.3249	0.7265	1.0000	1.3764	1.9626	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567
2	0.2887	0.6172	0.8165	1.0607	1.3862	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	0.2767	0.5844	0.7649	0.9785	1.2498	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	0.2707	0.5686	0.7407	0.9410	1.1896	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	0.2672	0.5594	0.7267	0.9195	1.1558	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	0.2648	0.5534	0.7176	0.9057	1.1342	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	0.2632	0.5491	0.7111	0.8960	1.1192	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	0.2619	0.5459	0.7064	0.8889	1.1081	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	0.2610	0.5435	0.7027	0.8834	1.0997	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498

例題では n-1 = 9　　$t_{0.025}(9)$=2.262

t分布を用いた区間推定

例題では

t0.025(10-1)=2.262

標本平均=50　不偏分散=25　標本サイズ=10

$$P\left(\bar{X} - t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}}\right) = 0.95$$

μの95%信頼区間の下限　　μの95%信頼区間の上限

計算すると，例題の答は

「46.4以上53.6以下」（[46.4, 53.6]）

前回の例題と比較

どちらも

標本平均=50
標本サイズ=10

母平均の95%信頼区間は

母分散=25　のとき　[46.9, 53.1]

不偏分散=25　のとき　[46.4, 53.6]

不偏分散は，母分散の推定量なので，

不確か →信頼区間が広い