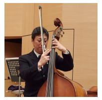
2016年度秋学期　統計学　第１４回

分布についての仮説を検証する
― 検定

浅野　晃
関西大学総合情報学部



仮説検定の考え方は，単純

くじのあたり確率

「夏祭り，夜店のくじに当たりなし
　露天商の男を逮捕」
（朝日新聞大阪版2013年7月29日）

「１万円以上をつぎ込んだ男性が不審に思い、府警に相談。２８日に露店を家宅捜索し、 当たりがないことを確認した」

半分当たるというくじへの疑問

「半分の確率で当たる」というくじを
10回ひいても，１回も当たらなかった

運が悪いのか？

（回転抽選器の写真）

それとも
「半分の確率で当たる」
というのがウソか？

http://epshop.net/epkyoto/7.1/15001/

こう考える

警察みたいに全部のくじを調べられないなら，

仮に，本当に「確率1/2で当たる」とする

そのとき，10回ひいて1回も当たらない確率は，$(1/2)^{10}=1/1024$

A. Asano, Kansai Univ.

こう考える

本当に「確率1/2で当たる」なら，

10回ひいて1回も当たらない確率は

1/1024（約0.001）

それでも「確率1/2で当たる」を信じるのは，

確率0.001でしか起きないことが，

いま目の前で起きていると信じるのと同じ

A. Asano, Kansai Univ.

こう考える

確率0.001でしか起きないことが，

いま目の前で起きていると信じる

そりゃちょっと無理がありませんか？

というわけで，

「確率1/2で当たる」はウソ，と

考えるほうが自然　　これが［仮説検定］

A. Asano, Kansai Univ.

区間推定から導かれる仮説検定

A. Asano, Kansai Univ.

正規分布の場合の区間推定

標本X1, ... Xnをとりだす
サイズn

標本平均 $\bar{X}$

母集団

母平均μ

正規分布
と仮定する

母平均μの95%信頼区間が
知りたい

（説明の都合です）

母分散σ^2がわかっているものとする

正規分布の場合の区間推定

考え方

標本は，母集団分布と同じ確率分布にしたがう
正規分布N(μ, σ^2)

標本平均$\bar{X}$は，やはり正規分布にしたがうが，分散が1/nになる　正規分布N(μ, σ^2/n)［性質２］

正規分布の［性質１］により

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}$$

は標準正規分布にしたがう
N(0, 1)

この例題は

標本X1, ... Xnをとりだす
サイズn

標本平均 $\bar{X}$

母集団
（受験者全体）

母平均μ

正規分布
と仮定する

母平均μの95%信頼区間が
知りたい

不偏分散s^2で代用

母分散σ^2がわからないので，

t分布

t統計量 $t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$ は

自由度(n-1)のt分布にしたがう
t(n-1)

（「スチューデントのt分布」という）
発見者ウィリアム・ゴセットのペンネーム

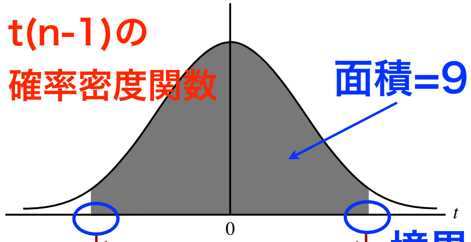
t分布を用いた区間推定

$t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$ は自由度(n-1)のt分布にしたがう

t(n-1)

t(n-1)の

確率密度関数



面積=95%

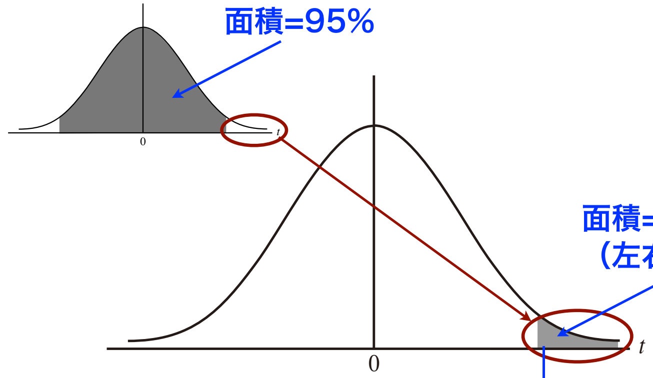
境界の値はいくら？

$t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$ が

この区間に入っている確率=95%とすると

t分布を用いた区間推定

面積=95%



面積=2.5%

（左右で5%）

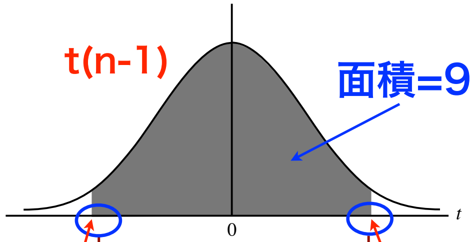
境界の値は自由度によってちがうので

$t_{0.025}$(n-1)としておく［上側2.5%点］という

t分布を用いた区間推定

t(n-1)

面積=95%



$t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$ が

この区間に入っている確率=95%

$-t_{0.025}$(n-1)　　$t_{0.025}$(n-1)

t分布を用いた区間推定

$t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$ が $-t_{0.025}$(n-1) と $t_{0.025}$(n-1) の間に入っている確率が95%

式で書くと

$$P\left(-t_{0.025}(n-1) \leqq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} \leqq t_{0.025}(n-1)\right) = 0.95$$

μの式に直すと

$$P\left(\bar{X} - t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}} \leqq \mu \leqq \bar{X} + t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}}\right) = 0.95$$

前回のプリントの例題

t0.025(10-1)=2.262

標本平均=50　不偏分散=25　標本サイズ=10

$$P\left(\bar{X} - t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}} \leqq \mu \leqq \bar{X} + t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}}\right) = 0.95$$

μの95%信頼区間の下限　μの95%信頼区間の上限

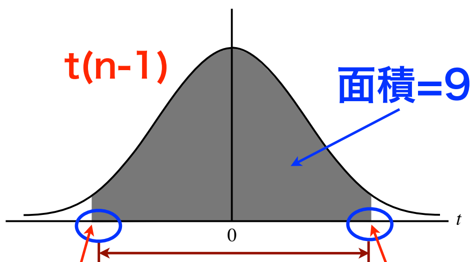
で，信頼区間を求めるのは，
今日の本題ではありません。

A. Asano, Kansai Univ.

区間推定と検定

A. Asano, Kansai Univ.

t分布を用いた区間推定



$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$$ が

この区間に入っている確率=95%

$-t_{0.025}(n-1)$　$t_{0.025}(n-1)$

A. Asano, Kansai Univ.

この式の意味は

$t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$ （t統計量）が $-t_{0.025}(n-1)$ と $t_{0.025}(n-1)$ の間に入っている確率が95%

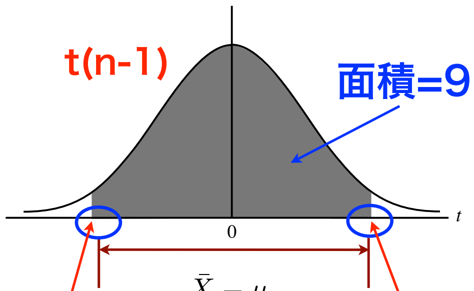
式で書くと

$$P\left(-t_{0.025}(n-1) \leqq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} \leqq t_{0.025}(n-1)\right) = 0.95$$

t統計量が $-t_{0.025}(n-1)$ と $t_{0.025}(n-1)$ の間に入っている，
という記述は，確率95%で当たっている

A. Asano, Kansai Univ.

見方を変えてみると



$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$$ が

この区間に入っていない確率=5%

-t0.025(n-1)　　　t0.025(n-1)

A. Asano, Kansai Univ.

見方を変えてみると

$$P\left(-t_{0.025}(n-1) \leqq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} \leqq t_{0.025}(n-1)\right) = 0.95$$

t統計量が -t0.025(n-1) と t0.025(n-1) の

間に入っている，という記述は，

確率95%で当たっている

t統計量が -t0.025(n-1) 以下か t0.025(n-1)

以上である，という記述は，

確率5%でしか当たっていない

A. Asano, Kansai Univ.

こんな例題（２ページ上）

（前回の区間推定の問題と同じ条件で）

「受験者全体の平均点（母平均μ）は

54点」という「仮説」を考えると，

この仮説は当たっていると

いえるでしょうか？

A. Asano, Kansai Univ.

「μ=54である」とすると

t統計量の値は

標本平均=50

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$$

さらに

μ=54　とすると

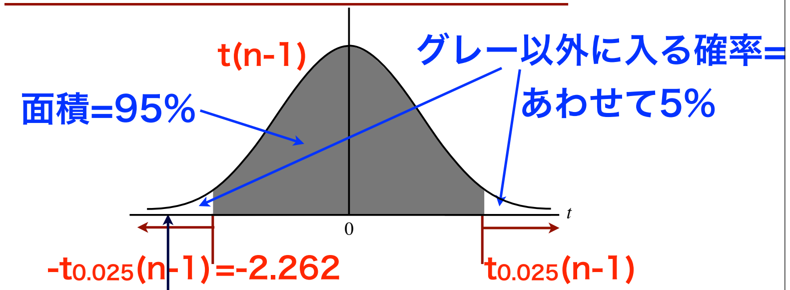
標本サイズ=10

不偏分散=25

t = -2.53 である。

A. Asano, Kansai Univ.

「μ=54である」とすると



μ=54であるとすると
t統計量 t = -2.53

t0.025(n-1)=2.262
標本サイズ=10

t統計量が -t0.025(n-1) 以下か t0.025(n-1) 以上である，という記述は，　正しい

「μ=54である」とすると

t統計量が -t0.025(n-1) 以下か t0.025(n-1) 以上である，という記述は，正しい

この記述は
確率5%でしか当たっていないはずでは？

確率5%でしか当たっていないはずの
記述が　当たっていることになってしまう

こんな推論ができる

t統計量が -t0.025(n-1) 以下か t0.025(n-1) 以上である，という記述は，
確率5%でしか当たっていないはず

μ=54であるとすると
t統計量 t = -2.53

n=10のとき
t0.025(10-1)=2.262

確率5%でしか当たっていないはずの
記述が，いま偶然当たっている
と考えざるをえない

こんな推論ができる

仮説「μ=54」が正しいとすると
確率5%でしか当たっていないはずの
記述が　いま偶然当たっていると考えざるをえない

確率5%でしかおきないことが偶然おきて
いると考えるよりも

仮説「μ=54」は間違っていると判断する

仮説「μ=54でない」が正しいと判断する

これが［仮説検定］（検定）

仮説「μ=54」が正しいとすると

確率5%でしか当たっていないはずの

記述が　いま偶然当たっていると考えざるをえない

［帰無仮説］

確率5%でしかおきないことが偶然おきているると考えるよりも

帰無仮説を［棄却する］

仮説「μ=54」は間違っていると判断する

［対立仮説］　を［採択する］

仮説「μ=54でない」が正しいと判断する

［有意］という考え

仮説「μ=54」が正しいとすると

確率5%でしか当たっていないはずの

記述が　いま偶然当たっていると考えざるをえない

確率5%でしかおきないことがおきているなら，それは偶然ではないと考える

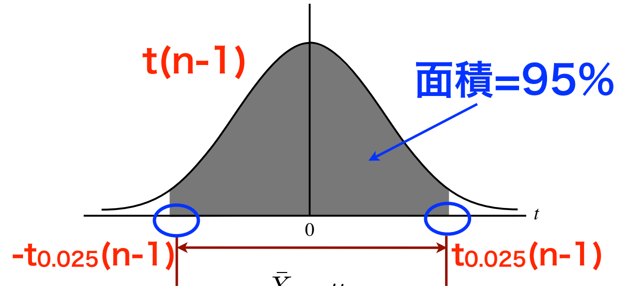
［有意］

確率が5%なら，それは「小さな確率」と考えている

［有意水準］

両側検定と片側検定

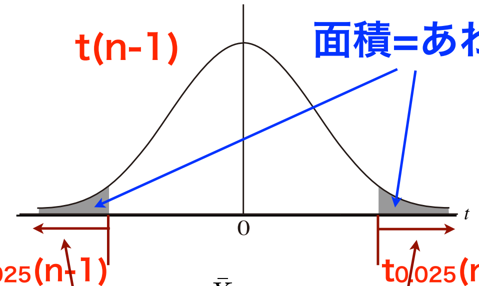
ここまでで説明した検定



$t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$ が

この区間に入っていない確率=5%

棄却域



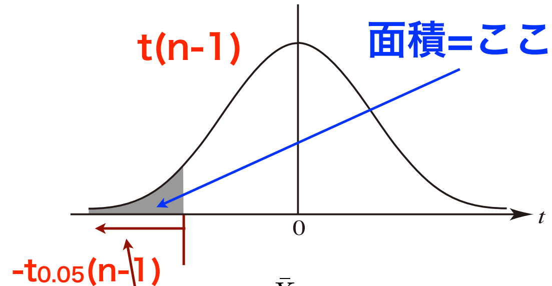
$t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$ が

このどちらかの区間に入っている確率=5%

入っているとき帰無仮説を棄却するので

［棄却域］という

こんな棄却域でもいいはず



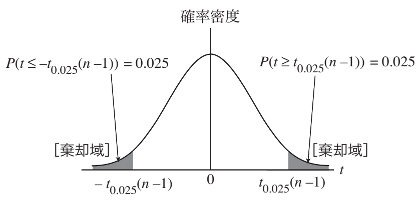
$t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$ が

この区間に入っている確率=5%

入っているとき帰無仮説を棄却する

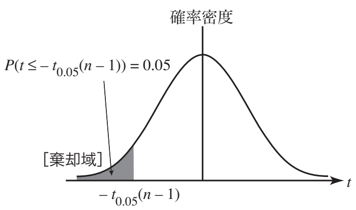
［棄却域］

両側検定と片側検定



棄却域が両側にある

［両側検定］



棄却域が片側にある

［片側検定］

どう違う？

例題のt統計量は

t統計量の値は

標本平均=50

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$$

標本サイズ=10

不偏分散=25

さらに，帰無仮説が正しいときμ=54とすると

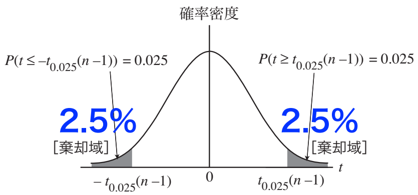
t = -2.53 である。

帰無仮説において

μが大きいと，t統計量は小さくなる

μが小さいと，t統計量は大きくなる

両側検定では



帰無仮説が正しい時，
t統計量が
左右どちらかの棄却域
に入ったら棄却

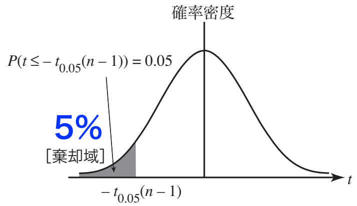
帰無仮説のμが	t統計量が	帰無仮説が	棄却されたら
大きすぎるとき（μ=70とか）	小さすぎて	左の棄却域に入ったら棄却	μはもっと小さいはず
小さすぎるとき（μ=30とか）	大きすぎて	右の棄却域に入ったら棄却	μはもっと大きいはず

μが大きすぎても
小さすぎても棄却。

対立仮説は「μは◯◯でない」

A. Asano, Kansai Univ.

片側検定では



帰無仮説が正しい時，
t統計量が
左にある棄却域に入っ
たら棄却

帰無仮説のμが	t統計量が	帰無仮説が	棄却されたら
大きすぎるとき（μ=70とか）	小さすぎて	左の棄却域に入ったら棄却	μはもっと小さいはず
小さすぎるとき（μ=30とか）	大きすぎて	右には棄却域はない	棄却しない

μが大きすぎる
ときだけ棄却。

対立仮説は「μは◯◯よりもっと小さい」
たとえ帰無仮説がμ=0であっても棄却しない。

A. Asano, Kansai Univ.

くじびきの例でいうと

帰無仮説：「当たり確率は50%である」
くじをひく立場なら

10回中1回も当たらなかったら
→ 帰無仮説が正しいとするとき，
そんなことが起きる確率は小さいし，
しかも結果に不満だから棄却したい

10回中10回当たったら
→ 帰無仮説が正しいとするとき，
そんなことが起きる確率はやはり小さい が，
結果に不満はないから棄却しない

片側検定

A. Asano, Kansai Univ.

くじびきの例でいうと

帰無仮説：「当たり確率は50%である」
賞品を出す立場なら

10回中1回も当たらなかったら
→ 帰無仮説が正しいとするとき，
そんなことが起きる確率は小さい が，
とくに損はしないから棄却しない

10回中10回当たったら
→ 帰無仮説が正しいとするとき，
そんなことが起きる確率はやはり小さい
それでは破産してしまうので棄却したい

やはり
片側検定

A. Asano, Kansai Univ.

くじびきの例でいうと

帰無仮説：「当たり確率は50%である」

中立の立場（商店会長？）なら

10回中1回も当たらなかったときも

10回中10回当たったときも

→ 帰無仮説が正しいとするとき,
そんなことが起きる確率はどちらも小さいし,
どちらにしても信用にかかわるので棄却したい

どの検定を用いるかは,
「立場」にもとづいて先に決めて
おかなければならない

これが
両側検定

いつもの状況

母集団
(受験者全体)

母平均μ

正規分布
と仮定する

標本X1, ... Xnをとりだす
サイズn

標本平均 $\overline{X}$

母分散σ^2がわからないので,

不偏分散s^2で代用

t分布

t統計量　$t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$　は

自由度(n-1)のt分布にしたがう

t(n-1)

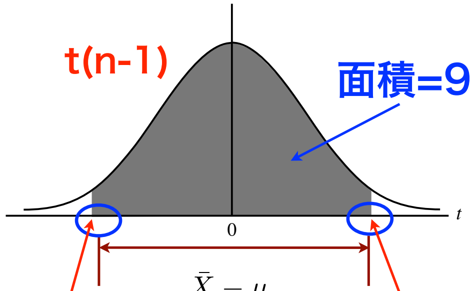
(「スチューデントのt分布」という)

発見者ウィリアム・ゴセットのペンネーム

t統計量については

t(n-1)

面積=95%



$t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$ が

この区間に入っていない確率=5%

$-t_{0.025}(n-1)$　　$t_{0.025}(n-1)$

こんな例題（2ページ上）

（前回の区間推定の問題と同じ条件で）

「受験者全体の平均点（母平均μ）は

54点」という「仮説」を考えると，

この仮説は当たっていると

いえるでしょうか？

A. Asano, Kansai Univ.

「μ=54である」とすると

t統計量の値は

標本平均=50

さらに

μ=54　とすると

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$$

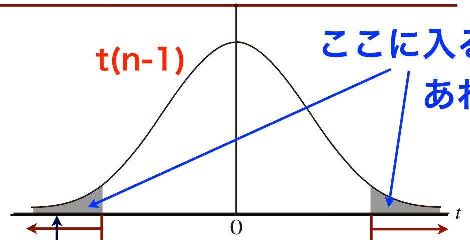
標本サイズ=10

不偏分散=25

t = -2.53 である。

A. Asano, Kansai Univ.

「μ=54である」とすると



t(n-1)

ここに入る確率=
あわせて5%
[棄却域]

$-t_{0.025}(n-1)$=-2.262

$t_{0.025}(n-1)$

μ=54であるとすると
t統計量 t = -2.53

$t_{0.025}(n-1)$=2.262
標本サイズ=10

t統計量が $-t_{0.025}(n-1)$ 以下か $t_{0.025}(n-1)$
以上である，という記述は，　正しい

A. Asano, Kansai Univ.

「μ=54である」とすると

t統計量が $-t_{0.025}(n-1)$ 以下か $t_{0.025}(n-1)$
以上である，という記述は，正しい

この記述は
確率5%でしか当たっていないはずでは？

確率5%でしか当たっていないはずの
記述が　当たっていることになってしまう

A. Asano, Kansai Univ.

こんな推論ができる

t統計量が $-t_{0.025}(n-1)$ 以下か $t_{0.025}(n-1)$ 以上である，という記述は，

確率5%でしか当たっていないはず

μ=54であるとすると

t統計量 t = -2.53

n=10のとき

$t_{0.025}(10-1)=2.262$

確率5%でしか当たっていないはずの記述が，いま偶然当たっていると考えざるをえない

こんな推論ができる

仮説「μ=54」が正しいとすると

確率5%でしか当たっていないはずの

記述が　いま偶然当たっていると考えざるをえない

確率5%でしかおきないことが偶然おきていると考えるよりも

仮説「μ=54」は間違っていると判断する

仮説「μ=54でない」が正しいと判断する

これが［仮説検定］（検定）

仮説「μ=54」が正しいとすると　［帰無仮説］

確率5%でしか当たっていないはずの

記述が　いま偶然当たっていると考えざるをえない

確率5%でしかおきないことが偶然おきていると考えるよりも

帰無仮説を［棄却する］

仮説「μ=54」は間違っていると判断する

［対立仮説］　を［採択する］

仮説「μ=54でない」が正しいと判断する

棄却されないときは

有意水準1%とすると

t統計量が $-t_{0.005}(n-1)$ と $t_{0.005}(n-1)$ の
間に入っている，という記述は，
確率99%で当たっている

t統計量が $-t_{0.005}(n-1)$ 以下か $t_{0.005}(n-1)$
以上である，という記述は，
確率1%でしか当たっていない

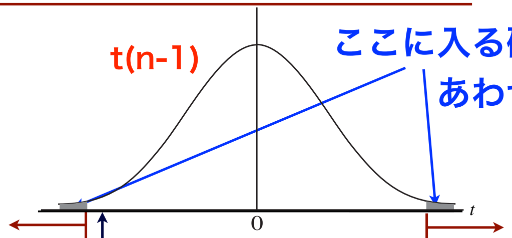
こんな推論ができる

t統計量が $-t_{0.005}(n-1)$ 以下か $t_{0.005}(n-1)$
以上である，という記述は，
確率1%でしか当たっていないはず

μ=54であるとすると
t統計量 t = -2.53

n=10のとき
$t_{0.005}(10-1)=3.250$

こんな推論ができる



ここに入る確率=
あわせて1%
[棄却域]

$-t_{0.005}(n-1)=-3.250$

$t_{0.005}(n-1)$

μ=54であるとすると
t統計量 t = -2.53

$t_{0.005}(n-1)=3.250$
標本サイズ=10

t統計量が $-t_{0.005}(n-1)$ 以下か $t_{0.005}(n-1)$
以上である，という記述は，正しくない

こんな推論ができる

t統計量が $-t_{0.005}(n-1)$ 以下か $t_{0.005}(n-1)$
以上である，という記述は，
確率1%でしか当たっていないはず

μ=54であるとすると
t統計量 t = -2.53

n=10のとき
$t_{0.005}(10-1)=3.250$

確率1%でしか当たっていないはずの
記述が，いま偶然当たっている
とまではいえない

こんな推論になる

帰無仮説「μ=54」が正しいとすると
確率1%でしか当たっていないはずの
記述が　いま偶然当たっている とまではいえない

確率1%でしかおきないことが偶然おきているとまではいえない

帰無仮説「μ=54」は間違っている
とは言い切れない

帰無仮説は棄却されない。 煮え切らない結論…

棄却されない場合

帰無仮説が棄却されるのは
帰無仮説が正しいとすると，
とても小さな確率でしか起きないはずのことが，いま起きていることになるから

帰無仮説が棄却されないときは
「いま起きていることがおきる確率は
とても小さい，とまではいえない」

棄却されない場合

帰無仮説が棄却されないときは
「いま起きていることがおきる確率は
とても小さい，とまではいえない」

だから
「帰無仮説が棄却されない」とは

~~帰無仮説が正しい~~
帰無仮説が間違っているとはいいきれない

有意水準について

今日の例題では

有意水準5%だと　帰無仮説を棄却する

有意水準1%だと　帰無仮説を棄却しない

有意水準が違うと
結論が正反対だけど，いいの？

検定とはそういうものです

有意水準は
物言いの慎重さを表す

有意水準が

大きい（5%）　大胆だが，蛮勇

確率5%でおきることでも「こんなことがおきるのは偶然とは思えない」として棄却

小さい（1%）　慎重だが，臆病

確率1%より大きいことなら「偶然でないと言い切れない」として棄却しない

検定は
どんなときにするものなのか

有意水準と第１種の誤り

有意水準5%のときは

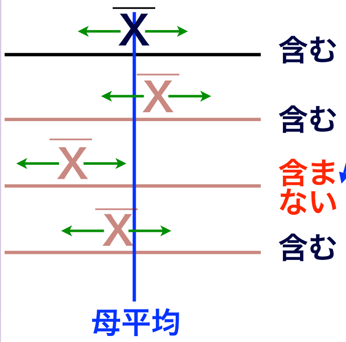
確率5%でしかおきないことがおきているなら，
それは偶然ではないと考える
[有意]

でも，確率5%でしかおきないことは，

言い換えれば，確率5%でおきるのでは？

有意水準と第１種の誤り

確率5%でしかおきないことは，
確率5%でおきる



区間推定において
「95%信頼区間」が
確率5%ではずれるように

帰無仮説が正しくても，
偶然標本が偏っていたために，
棄却してしまう確率が5%

[第１種の誤り]
その確率=有意水準

有意水準と第１種の誤り

つまり

帰無仮説が本当に正しいとしても，
有意水準5%の仮説検定を何度も行うと，
そのうちの5%では第1種の誤りを犯す

正しいはずの帰無仮説を棄却し，
採択すべきでない対立仮説を採択してしまう

検定の結論が言っていること

検定で「帰無仮説を棄却する」とは

私は，帰無仮説は間違いだ，と判断する。

ただし

私は100回中5回はウソを言う
（第1種の誤りを犯す）。

私が今回，本当のことを言っているのか，
ウソを言っているのか，
それは誰にもわからない。

検定はどんなときに

何度でも標本をとりだして検定できるようなら，
検定などする必要はない

小さな標本を１回しかとりだせないときに，
それでも十分にいえる結論を導く

何度も検定をすれば，
棄却されないはずの帰無仮説も
たまには棄却される

「血液型と性格に関係がない」という帰無仮説も
たまに棄却されることがある

最近はこんな研究も

血液型と性格「関連なし」

読売新聞 2014.7.19

　血液型と性格の関連性に科学的根拠はないとする統計学的な解析結果を、九州大の縄田健悟講師（社会心理学）が発表した。

　日米の１万人以上を対象にした意識調査のデータを分析した。

　質問に対する回答のうち、血液型によって差があったのは３項目だけで、その差もごくわずかだったため「無関連であることを強く示した」と結論づけた。

A. Asano, Kansai Univ.

検定で，標本サイズが大きいと

標本サイズが大きいと

区間推定では　信頼区間が狭くなる
検定では　棄却域が広くなる

標本サイズが非常に大きいと

帰無仮説が

ちょっとでも疑わしいと棄却される

それでも「血液型と性格に関係がない」
という帰無仮説が棄却されないなら
「無関連であることを強く示し」ている

A. Asano, Kansai Univ.