

2018年度秋学期 応用数学（解析） 第4回

第1部・「無限」の理解  
収束とは何か,  $\varepsilon$ - $\delta$  論法

浅野 晃  
関西大学総合情報学部



## 微分を習ったときの説明💡

何かだまされている気がする🤔

## 微分の説明

関数  $f(x) = x^2$  の微分

$$\begin{aligned}
 \frac{df(x)}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} && h \text{ はゼロに近づいているだけで,} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} && \text{ゼロではないから,} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + \cancel{h}) = 2x && \text{分母分子を } h \text{ で割る}
 \end{aligned}$$

やっぱり  $h$  はゼロ

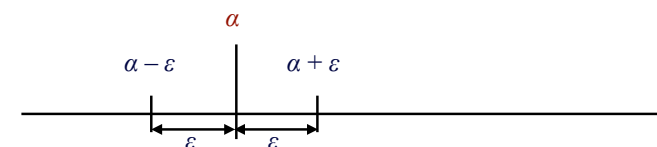
これっておかしくありませんか？

収束＝「限りなく近づく」  
ことの意味🤔

## 数列の収束の定義

数列  $\{a_n\}$  が  $\alpha$  に収束するとは

$\alpha$  のまわりにどんなに狭い区間  
 $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$  ( $\varepsilon > 0$ ) を設定しても,

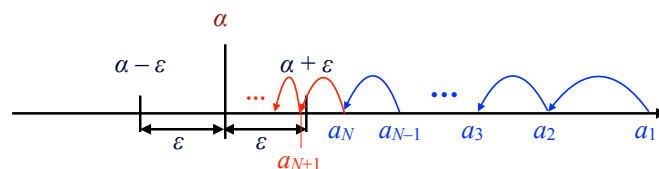


## 数列の収束の定義

数列  $\{a_n\}$  が  $\alpha$  に収束するとは

数列が十分大きな番号  $N$  まで進めば

$N$  番より大きな番号  $n$  については,  
 $a_n$  は, みなその狭い区間  $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$  に入る

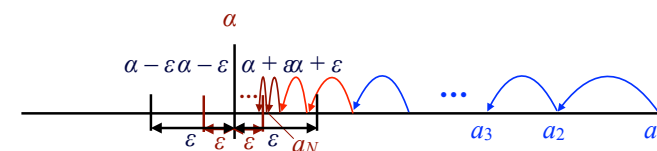


## 数列の収束の定義

数列  $\{a_n\}$  が  $\alpha$  に収束するとは

数列が十分大きな番号  $N$  まで進めば

$N$  番より大きな番号  $n$  については,  
 $a_n$  は, みなその狭い区間  $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$  に入る



$\varepsilon$  をどんなに小さくしても そういう  $N$  がある

## 数列の収束の定義

数列  $\{a_n\}$  が  $\alpha$  に収束するとは

$\alpha$  のまわりにどんなに狭い区間  
 $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ を設定しても( $\varepsilon > 0$ )

数列が十分大きな番号  $N$ まで進めば

$N$  番より大きな番号  $n$  については,  
 $a_n$  はみなその狭い区間  $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ に入る

$\varepsilon - N$  論法

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N; n > N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

## 数列の発散の定義

数列  $\{a_n\}$  が  $\infty$  に発散する

どんなに大きな数  $G$ を持ってきても,

数列が十分大きな番号  $N$ まで進めば

$N$  番より大きな番号  $n$  については,  
 $a_n$  はみな  $G$  より大きくなる

$$\forall G, \exists N; n > N \Rightarrow a_n > G$$

## 収束や発散は「無限」なのか

「無限」とはひとつも言っていない

どんなに狭い区間  $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ でも

どんなに大きな数  $G$ でも

十分大きな番号  $N$ なら

どれも「無限」ではなく有限

ただし、求めに応じて  
好きなだけ狭く・大きくできる

実数の連続性と収束🤔

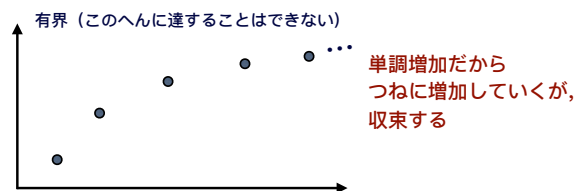
## 実数の連続性と収束

実数の連続性を述べる公理の、4つめの表現  
**実数の有界な単調数列は収束する**

数列  $\{a_n\}$  が

「単調増加」とは,  $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$

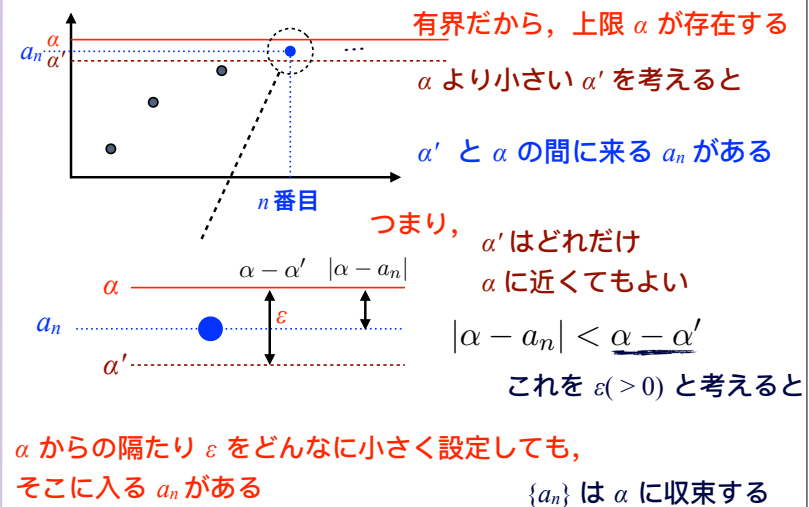
「単調減少」とは,  $a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots$



2018年度秋学期 応用数学 (解析)

30 - 13

## ワイエルシュトラスの定理から証明



2018年度秋学期 応用数学 (解析)

30 - 14

## 数列の収束に関する例題💡

### 例題

$a > 0$  のとき  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$  を証明せよ。

$\frac{a^k}{k!} = C$  とおく。番号  $k$  は,  $k > 2a$  であるとする。

$n > k$  となる番号  $n$  について,

$$\begin{aligned} \frac{a^n}{n!} &= \frac{a^k}{k!} \times \frac{a}{k+1} \times \frac{a}{k+2} \times \dots \times \frac{a}{n} \\ &= C \times \frac{a}{k+1} \times \frac{a}{k+2} \times \dots \times \frac{a}{k+(n-k)} \end{aligned}$$

2018年度秋学期 応用数学 (解析)

30 - 16

## 例題

$n > k$  となる番号  $n$  について,

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^k}{k!} \times \frac{a}{k+1} \times \frac{a}{k+2} \times \cdots \times \frac{a}{n}$$

$$= C \times \frac{a}{k+1} \times \frac{a}{k+2} \times \cdots \times \frac{a}{k+(n-k)}$$

$k > 2a$  なので

$$\frac{a^n}{n!} < C \times \frac{a}{2a+1} \times \frac{a}{2a+2} \times \cdots \times \frac{a}{2a+(n-k)}$$

$$< C \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{C \cdot 2^k}{2^n} < \frac{C \cdot 2^k}{n}$$

そこで, どんな小さな  $\varepsilon (> 0)$  についても,  
番号  $n$  が  $n > \frac{C \cdot 2^k}{\varepsilon}$  であれば  $\frac{a^n}{n!} < \varepsilon$

つまり  
 $\{a^n/n!\}$  は 0 に  
収束する

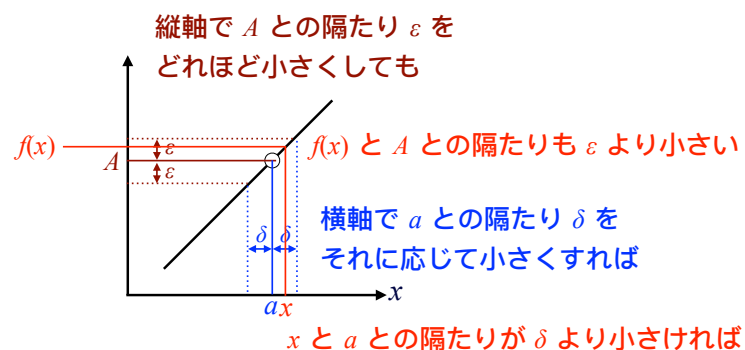
## 関数の極限 🤔

## 関数の極限

数列の収束と同じ論法を用いる

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

関数  $f(x)$  の  $x \rightarrow a$  の極限が  $A$  であるとは



## 関数の極限

どんなに小さな  $\varepsilon$  を考えても ( $\varepsilon > 0$ )

$x$  と  $a$  との隔たりを  $\delta$  より小さくすれば  
 $f(x)$  と  $A$  の隔たりも  $\varepsilon$  より小さくできる

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$\varepsilon - \delta$  論法

$\varepsilon$  も  $\delta$  も, ただの正の数で, 0ではないし,  
0に「無限に」近づくわけでもない

## 最初の微分の例

$h \rightarrow 0$  と書いてあっても、  
 $h$  はあくまで正の数で、0ではない

$$\begin{aligned}\frac{df(x)}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x\end{aligned}$$

$h$  はゼロに近づいているだけで、  
ゼロではないから、  
分母分子を  $h$  で割る

やっぱり  $h$  はゼロ ではなくて

収束する先が  $h=0$  を代入したときの値と同じ、というだけ

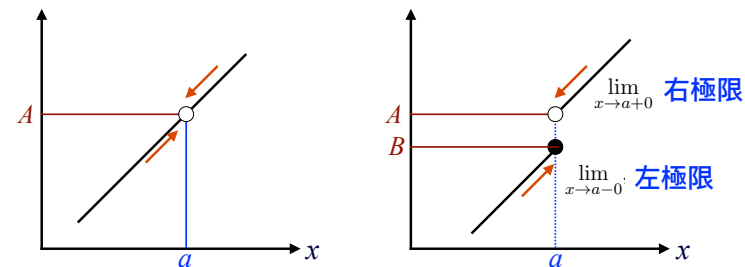
2018年度秋学期 応用数学 (解析)

30 - 21

## 左極限と右極限

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

関数  $f(x)$  の  $x \rightarrow a$  の極限が  $A$  であるとは  
 $x$  が大きい方から  $a$  に近づいても  
小さい方から  $a$  に近づいても、  
どちらの極限も  $A$



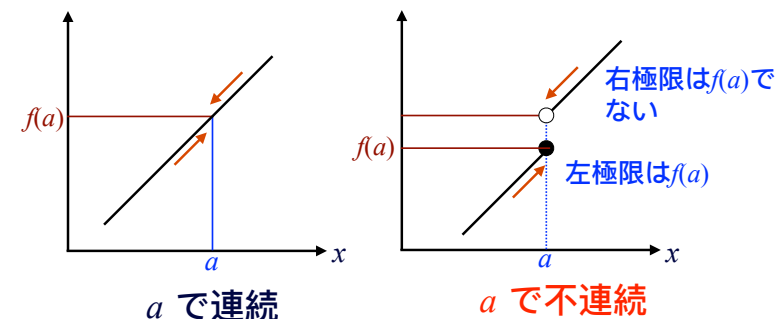
2018年度秋学期 応用数学 (解析)

30 - 22

関数の「連続」と「一様連続」 🤔

## 関数の連続性

関数  $f(x)$  が  $x = a$  で連続であるとは  
関数  $f(x)$  の  $x \rightarrow a$  の極限が  $f(a)$  であること

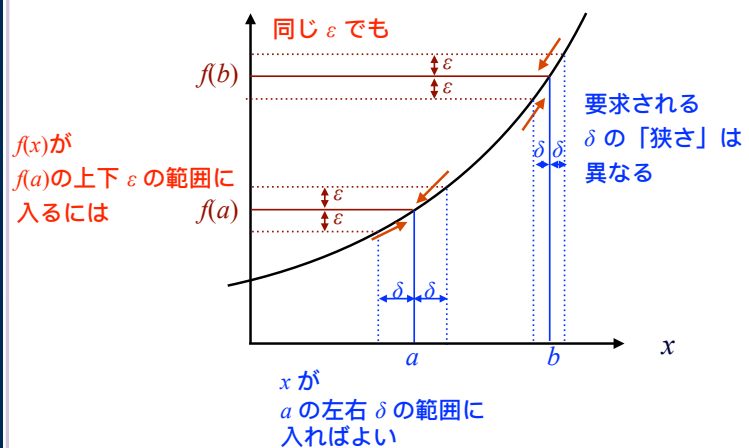


区間  $I$  のどの点でも連続なら「区間  $I$  で連続」

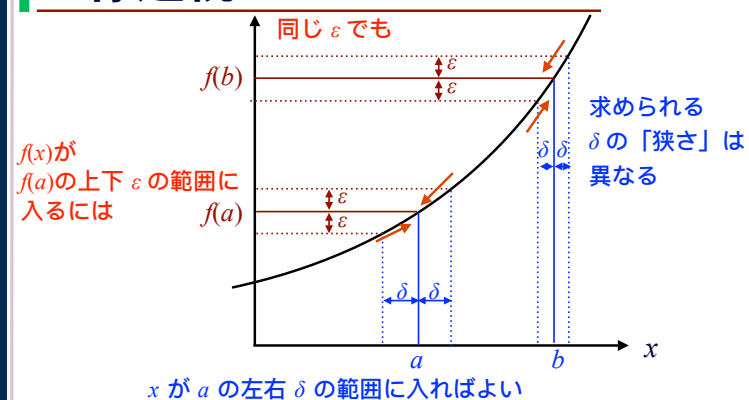
2018年度秋学期 応用数学 (解析)

30 - 24

## $\varepsilon - \delta$ 論法で話をする

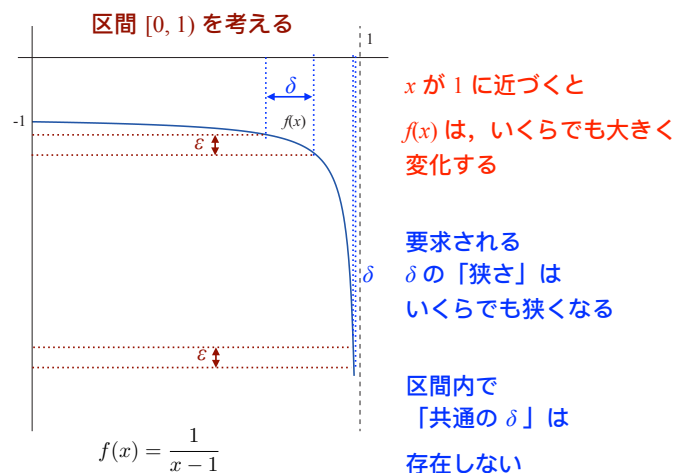


## 一様連続



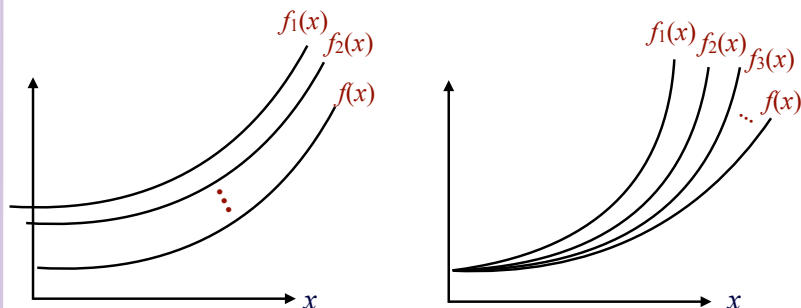
この場合は「狭い方の  $\delta$ 」をどこでも用いればよい  
どの点でも「共通の  $\delta$ 」を用いれば連続といえるとき  
「一様連続」という

## 連続だが一様連続でない例



関数列の収束 🤔

## 関数列の収束と「一様収束」



区間内の各点で,  
 $f_n(x)$  と  $f(x)$  の隔たりが  
0 に近づく

[各点収束]

左のほうでは収束していくが  
いくらでも右に行けば  
いつまでたっても  
収束しない

[一様収束] でない

## 今日のまとめ

「限りなく近づく」とは,  
「無限」ではない

求めに応じて  
好きなだけ近くできること