

2018年度秋学期 応用数学（解析） 第6回

第2部・基本的な微分方程式  
変数分離形の変形

浅野 晃  
関西大学総合情報学部



## 変数分離形（復習）🤔

## 変数分離形

一般には  $g(x)x' = f(t)$

$x' = \frac{dx}{dt}$  とすると  $g(x)dx = f(t)dt$

両辺それぞれを  
積分すると  $\int g(x)dx = \int f(t)dt + C$

一般解に含まれる積分定数  $C$  は、  
初期値を代入して定まり、特殊解が得られる

今日は、変形によって変数分離形に持ち込める方程式です

## 1. 同次形🤔

## 同次形

一般には  $\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{x}{t}\right)$   $x/t$  の式になっている

$\frac{x}{t} = u$  とおくと  $x = ut$  この両辺を微分  $\frac{dx}{dt} = t \frac{du}{dt} + u$   
積の微分

よって  $t \frac{du}{dt} + u = f(u)$

$$\frac{1}{f(u) - u} du = \frac{1}{t} dt$$

変数分離形になった

## 同次関数

関数  $M(x, t)$  が  $k$  次の同次関数であるとは

$M(ut, t) = t^k M(u, 1)$  の形になっていること  
 $t^k$  をくくり出せる

微分方程式が  $\frac{dx}{dt} = \frac{M(x, t)}{N(x, t)}$  の形で

$M, N$  がどちらも  $k$  次の同次関数なら,  $x = ut$  とおいて

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{M(x, t)}{N(x, t)} \\ &= \frac{t^k M(u, 1)}{t^k N(u, 1)} = \frac{M(u, 1)}{N(u, 1)} = \frac{M\left(\frac{x}{t}, 1\right)}{N\left(\frac{x}{t}, 1\right)} \end{aligned}$$

前ページの  
形になる

## 例題

$x' = \frac{t-x}{t+x}$  を解いて, 一般解を求めよ。

分母分子を  $t$  でわると  $\frac{dx}{dt} = \frac{1 - \frac{x}{t}}{1 + \frac{x}{t}}$  同次形

$\frac{x}{t} = u$  とおくと  $x = ut$  より  $\frac{dx}{dt} = t \frac{du}{dt} + u$

よって  $t \frac{du}{dt} + u = \frac{1-u}{1+u}$

$$\frac{1}{\frac{1-u}{1+u} - u} du = \frac{1}{t} dt \quad t \text{ と } u \text{ を分離}$$

$$\frac{u+1}{u^2+2u-1} du = -\frac{1}{t} dt$$

## 例題

$x' = \frac{t-x}{t+x}$  を解いて, 一般解を求めよ。

微分の関係に  
なっている  $\frac{u+1}{u^2+2u-1} du = -\frac{1}{t} dt$

ここで  $u^2 + 2u - 1$  の微分が  $2(u+1)$  になるから,  
上の式の両辺を積分すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log(|u^2 + 2u - 1|) &= -\log|t| + C && \text{対数の和} \rightarrow \text{真数の積} \\ \log(|u^2 + 2u - 1|) &= \log(A|t|^{-2}) && \text{対数の} \circ \text{倍} \rightarrow \text{真数の} \circ \text{乗} \\ t^2(u^2 + 2u - 1) &= A \end{aligned}$$

定数は任意なので, 絶対値が外れる

$$u = \frac{x}{t} \text{ に戻すと } x^2 + 2tx - t^2 = A$$

## 2. 1階線形 🤔

## 1 階線形微分方程式

一般には  $\frac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t)$  の形になっているもの

$p(t) = \exp\left(\int P(t)dt\right)$  と置くと,  
一般解は  $x = \frac{1}{p(t)} \left( \int p(t)Q(t)dt + C \right)$

なぜならば

$$\begin{aligned} (p(t)x)' &= (p(t))'x + p(t)x' && \text{積の微分} \\ &= \left[ \exp\left(\int P(t)dt\right) \right]' x + p(t)x' \\ &= p(t)P(t)x + p(t)x' && \text{指数の合成関数の微分} \\ &= p(t) \{ P(t)x + x' \} = p(t)Q(t) \end{aligned}$$

よって、両辺を積分して  $p(t)x = \int p(t)Q(t)dt + C$

## 例題

$x' + x = t$  を解いて、一般解を求めよ。

$\frac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t)$  にあてはめると  $P(t) \equiv 1, Q(t) = t$

よって  $p(t) = \exp\left(\int P(t)dt\right)$  とすると  $p(t) = \exp\left(\int 1dt\right)$

前ページの式から  $p(t)x = \int p(t)Q(t)dt + C$

$$C_2 e^t x = \int C_2 e^t t dt + C_3$$

$$\frac{C_3}{C_2} = C \rightarrow e^t x = \int e^t t dt + C$$

$$\begin{aligned} \text{部分積分} & \Rightarrow e^t t - \int e^t dt + C \\ & = e^t t - e^t + C \end{aligned}$$

よって

$$x = t - 1 + C e^{-t}$$

## 2' . ベルヌーイの微分方程式 🤔

# ベルヌーイの微分方程式

一般には  $\frac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t)x^n$  の形 ( $n \neq 1$ )

$u = x^{1-n}$  とおくと 1 階線形微分方程式に変形できる

なぜならば

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} + P(t) = Q(t)x^{n-1}$$

$$\log u = (1-n) \log x$$

両辺を微分する

$$\frac{u'}{u} = (1-n) \frac{x'}{x}$$

代入

$$\frac{1}{1-n} \frac{u'}{u} + P(t) = Q(t) \frac{1}{u}$$

$$u' + (1-n)P(t)u = (1-n)Q(t) \quad \text{1 階線形}$$

# 例題

$x' + tx = tx^2$  が 1 階線形微分方程式で表せることを示せ。

$u = x^{-1}$  とおく

両辺の対数をとると  $\log u = -\log x$

両辺を  $t$  で微分すると  $\frac{u'}{u} = -\frac{x'}{x}$

両辺を  $x$  で割ると  $\frac{x'}{x} + t = tx$

$$\frac{x'}{x} + t = tx$$

$$-\frac{u'}{u} + t = \frac{t}{u}$$

-u倍

1 階線形

$$u' - tu = -t$$

# 今日のまとめ

同次形  
1 階線形  
ベルヌーイ