

2018年度秋学期 応用数学（解析） 第10回

第3部・微分方程式に関する話題
生存時間分布と半減期

浅野 晃
関西大学総合情報学部



今日は 「寿命」を扱う微分方程式

寿命は「確率変数」

人間の寿命は、各個人によってばらばら
機械の寿命も、同じ型でも個体によって
ばらばら

その理由は「偶然」

寿命は【確率変数】であるという

寿命がいくらである確率がどのくらい
であるかを表すのが【確率分布】

寿命の確率分布を考える

寿命を表す確率変数 T
(時刻0に誕生した人が死亡する時刻)

$$l(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} P(t < T < t + \Delta | T > t)$$

次の瞬間 単位時間あたり 時刻 t までは確かに生存している人が
時刻 t 以後、時間 Δ の間に死亡する
確率

$l(t)$ は
時刻 t まで生存している人が
次の瞬間に死ぬ危険の度合 【ハザード関数】

累積分布関数と「生存関数」

確率変数 T に対して $F(t) = P(T \leq t)$
 を「累積分布関数」
 この場合
 寿命が t 以下である確率

$$S(t) = 1 - F(t) = P(T > t) \quad \text{【生存関数】}$$

時刻 t の時点で
 まだ生きている確率

ハザード関数は「瞬間瞬間の死亡の危険」

生存関数は、ある時間がたったとき、
 まだ生きている確率

生存関数とハザード関数

寿命 T ハザード関数 $l(t)$
 累積分布関数 $F(t)$

$$\begin{aligned} l(t) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} P(t < T < t + \Delta | T > t) \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{P\{(t < T < t + \Delta) \text{ and } (T > t)\}}{P(T > t)} \quad \text{（条件付確率の定義）} \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{P(t < T < t + \Delta)}{P(T > t)} \quad \text{（累積分布関数の定義）} \\ &= \frac{1}{P(T > t)} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta) - F(t)}{\Delta} \end{aligned}$$

含まれる
 $F(t) = P(T \leq t)$

生存関数とハザード関数

$$\begin{aligned} l(t) &= \frac{1}{P(T > t)} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta) - F(t)}{\Delta} \\ &= \frac{1}{P(T > t)} F'(t) \quad \text{（微分の定義）} \\ f(t) &= F'(t) \text{ とする 【確率密度関数】} \\ l(t) &= \frac{f(t)}{S(t)} \quad \text{（生存関数の定義）} \\ S(t) &= P(T > t) \\ S'(t) &= (1 - F(t))' = -F'(t) = -f(t) \end{aligned}$$

以上から $l(t) = -\frac{S'(t)}{S(t)}$ という微分方程式が
 得られる

微分方程式を解く

$$\begin{aligned} l(t) &= -\frac{S'(t)}{S(t)} \\ &= -\frac{d}{dt}(\log S(t)) \quad \text{（両辺を積分）} \\ -\int_0^t l(u) du &= \log S(t) - \log S(0) + C \quad \text{時刻0, つまり誕生の瞬間に} \\ & \quad \text{生存している確率は1} \\ & \quad \text{つまり } S(0) = 1 \\ & \quad \text{ } t=0 \text{ のとき } S(0) = 1 \text{ だから} \\ & \quad \text{ } C=0 \end{aligned}$$

$$\text{よって } S(t) = \exp\left(-\int_0^t l(u) du\right)$$

という解が得られる ハザード関数と
 生存関数の関係

ワイブル分布と 指数分布

ワイブル分布

ハザード関数を $l(t) = \lambda p(\lambda t)^{p-1}$ と仮定する

$S(t) = \exp\left(-\int_0^t l(u)du\right)$ に代入

$$S(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda p(\lambda u)^{p-1} du\right) \quad \text{微積分の関係}$$

$$= \exp\left(-\left[(\lambda u)^p\right]_{u=0}^{u=t}\right) = \exp\left(-(\lambda t)^p\right)$$

$$F(t) = 1 - S(t) = 1 - \exp\left(-(\lambda t)^p\right)$$

この形の累積分布関数をもつ確率分布を
【ワイブル分布】とよぶ

ワイブル分布のパラメータ

$l(t) = \lambda p(\lambda t)^{p-1}$ パラメータは λ と p

λ が大きいと, 死亡・故障する危険が
ハザード関数が全体に大きくなる どの時刻でも大きくなる

$p > 1$ のときは, $l(t) = \lambda p(\lambda t)^{p-1}$ の指数が正
時間が経つにつれて死亡・故障する危険が 大きくなる
【摩耗故障】

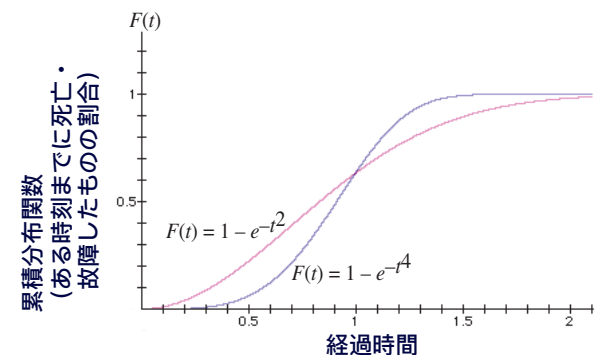
$0 < p < 1$ のときは, $l(t) = \lambda p(\lambda t)^{p-1}$ の指数が負
時間が経つにつれて死亡・故障する危険が 小さくなる
【初期故障】

ワイブル分布のパラメータ

p = 2 の場合 と p = 4 の場合

どちらも摩耗故障 (時間につれて故障しやすくなる)

p = 4 のほうが, 急激に故障が増える



ワイブルプロット

実務では、たくさんの個体で耐久試験を行い、ワイブル分布を仮定して、パラメータを推測する

$$S(t) = \exp(-(\lambda t)^p) \text{ より } \frac{1}{S(t)} = \exp((\lambda t)^p)$$

両辺の対数を2回とる ↓

$$\log \left\{ \log \left(\frac{1}{S(t)} \right) \right\} = \log \{ \log (\exp((\lambda t)^p)) \}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_Y = \log \{ (\lambda t)^p \}$$

$$= p(\log t + \log \lambda)$$

$$Y = p(X + \log \lambda) \quad \leftarrow X$$

時刻を上の X 、その時刻での生存割合を上の Y に変換してプロット→並びを近似する直線の傾きが p

指数分布

$$l(t) = \lambda p(\lambda t)^{p-1} \text{ で } p = 1 \text{ の場合}$$

ハザード関数は $l(t) = \lambda$ 死亡・故障する危険が時刻によらず一定
[偶発故障]

累積分布関数は $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ [指数分布]

生存関数は $S(t) = e^{-\lambda t}$

放射性原子核は、どの時刻においても、その時点で存在する核のうち一定の割合が崩壊する

ハザード関数が一定で、指数分布にしたがう

半減期

ある時刻に存在する原子核の数が、その半分になるまでの時間は、どの時刻でも一定

時刻 t に存在する原子核の数が半分になる時刻を t' とする

$$S(t') = \frac{1}{2} S(t)$$

指数分布の生存関数 $S(t) = e^{-\lambda t}$

$$e^{-\lambda t'} = \frac{1}{2} e^{-\lambda t}$$

対数をとる

$$-\lambda t' = -\log 2 - \lambda t$$

$$\underline{t' - t} = \frac{\log 2}{\lambda} \quad t \text{ によらず一定}$$

原子核の数が半分になるまでの時間 [半減期]

今日のまとめ

集団中の個体の数が死亡・故障によって減少して行く
この現象を表す微分方程式

解に仮定を持ち込むことで、ワイブル分布、指数分布といった「死亡・故障による現象のモデル」が導かれる