

2018年度秋学期 応用数学（解析） 第11回

第3部・微分方程式に関する話題
振動と微分方程式

浅野 晃
関西大学総合情報学部



今日は
「振動」を扱う微分方程式💡

振動とは

ある方向に進めば進むほど、
逆向きに進もうとする力が働く
ときにおきる運動

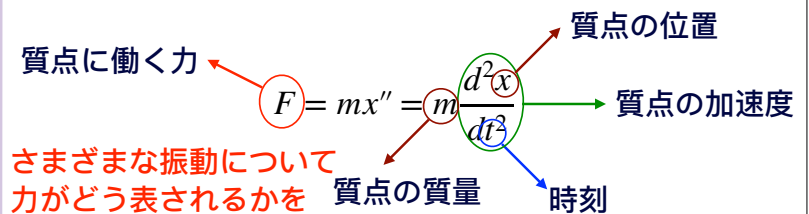
釣り合い位置から両方に往復を繰り返す

質点の運動方程式

質点 = 質量はあるが大きさはない点

大きさがないので、物体自身の回転などは
考えなくてよい

ニュートンの運動方程式



さまざまな振動について
力がどう表されるかを
考える

単振動

単振動

もっとも単純な振動，復元力（下記）のみが働く

釣り合い位置にもどろうとする力 [復元力]

原点を釣り合い位置とし，そこからの距離に比例する復元力が働くとする

$$F = -kx$$

正の定数
位置

釣り合い位置からの方向の
逆向きの力なのでマイナス

単振動の運動方程式

$$F = mx'' \text{ より } mx'' = -kx$$

$F = -kx$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ とおくと

$$x'' + \omega_0^2 x = 0$$

斉次形の2階線形微分方程式

特性方程式は $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$ 虚数解 $\lambda = \pm i\omega_0$

一般解は $x = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$

単振動の運動方程式

$$x'' + \omega_0^2 x = 0 \text{ より } x = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$$

位置 x は実数だから，

C_1, C_2 とも実数でなければならない

三角関数を合成すると

$$x = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$,
 $\phi = -\tan^{-1}(C_2/C_1)$

x 軸上で $[-A, A]$ の範囲を往復する振動 単振動の式

単振動の式

x 軸上で $[-A, A]$ の範囲を往復する振動

$$x = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

[振幅]

[角振動数 (角周波数)]

時間が1秒進むと,
($\omega_0 t + \phi$) が何ラジアン進むか

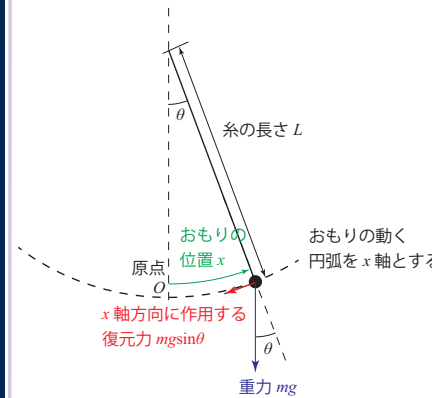
1 往復 = 2π ラジアン進むこと

それに必要な時間は $2\pi/\omega_0$ [周期]

1 秒間に何往復するか?

その回数は, 周期の逆数 $\omega_0/2\pi$ [振動数 (周波数)]

単振り子は単振動か?



復元力は $-mg \sin \theta$

θ が小さいとき
 $\sin \theta$ は θ で近似できる

$\theta = x/L$ (ラジアン) なので,
復元力は $-(mg/L)x$

これを k とみれば
単振動

周期 $\frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{mL}{mg}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ L と g だけで決まる (振り子の等時性)

θ が小さい, つまり振れ幅が小さいときのみ成り立つ

減衰振動

減衰振動

復元力以外に, [抵抗] がはたらく場合
運動が速いほど, それを妨げる力が働く
空気抵抗など

質点の速度は x' \rightarrow 抵抗力は $-ax'$
逆向きで マイナス
正の定数

運動方程式は

$$mx'' = -kx - ax' \rightarrow x'' + 2\mu x' + \omega_0^2 x = 0$$

$\mu = \frac{a}{2m}$ とおく [抵抗係数]
 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

減衰振動の運動方程式

$$x'' + 2\mu x' + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{これも}$$

斉次形の2階線形微分方程式

特性方程式は $\lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_0^2 = 0$ 解 $\lambda = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}$

$\mu^2 < \omega_0^2$ の場合を考える 抵抗力が比較的小さい場合

$$\lambda = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2} \quad \text{は虚数解}$$

< 0

微分方程式の解 $x = e^{-\mu t} (C_1 \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} t) + C_2 \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} t))$

三角関数を合成 $x = Ae^{-\mu t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} t + \phi)$

振幅が時間とともに小さくなる
[減衰振動]

強制振動と共鳴 🤔

強制振動

復元力に加えて、外部から [強制力] がはたらく場合

質点を、角振動数 ω で強制的に振動させる

復元力は $-kx$ 運動方程式は

強制力は $F \cos \omega t$ $mx'' = -kx + F \cos \omega t$

$$f = \frac{F}{m} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$x'' + \omega_0^2 x = f \cos \omega t$ これは
非斉次形の2階線形微分方程式

強制振動の運動方程式

$$x'' + \omega_0^2 x = f \cos \omega t$$

対応する斉次形の $x'' + \omega_0^2 x = 0$ 単振動の式と同じ
微分方程式は

一般解は $x = A \cos(\omega_0 t + \phi)$

特殊解をひとつ見つける

$x = C \cos \omega t$ を入れてみると $C(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t = f \cos \omega t$

よって、 $\omega \neq \omega_0$ のとき $C = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2}$

非斉次形の一般解は $x = A \cos(\omega_0 t + \phi) + \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$

強制振動

[強制振動] の式 $x = A \cos(\omega_0 t + \phi) + \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$

強制力のないときの振動
[固有振動]

ω_0 [固有角振動数]

$\omega_0/2\pi$ [固有振動数]

強制振動

強制振動の角振動数 ω が固有角振動数 ω_0 に近づくと
強制振動の項が大きくなる

$\omega = \omega_0$ のときは発散する

共鳴

$\omega = \omega_0$ のときは強制振動の項が発散する

もう一度もとの方程式に戻る $x'' + \omega_0^2 x = f \cos \omega t$

$x = t(C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t)$ と見当をつけて、

また右辺も $\omega = \omega_0$ としてそれぞれ代入すると

$$-2C_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + 2C_2 \omega_0 \cos \omega_0 t = f \cos \omega_0 t$$

よって $C_1 = 0, C_2 = \frac{f}{2\omega_0}$

解は $x = A \cos(\omega_0 t + \phi) + \frac{ft}{2\omega_0} \sin \omega_0 t$

時間がたつと振動し
ながら発散する

[共鳴]

問題

問題

単振動において、

$t = 0$ のとき $x = 0, x' = v$ となるとき、

運動方程式の特殊解を求めよ。

単振動の運動方程式の一般解は $x = A \cos(\omega_0 t + \phi)$

両辺を t で微分すると $x' = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$

$t = 0$ のとき $x = 0, x' = v$ となるので

$$x(0) = A \cos \phi = 0 \longrightarrow A = 0 \text{ だと } x \equiv 0$$

$$x'(0) = -A\omega_0 \sin \phi = v \quad \text{振動にならない}$$

よって $\cos \phi = 0$

問題

一般解 $x = A \cos(\omega_0 t + \phi)$ $x' = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$

題意より

$$x(0) = A \cos \phi = 0 \quad x'(0) = -A\omega_0 \sin \phi = v$$

$\cos \phi = 0$ より $\phi = \frac{\pi}{2}$ にできる このとき $\sin \phi = 1$

つまり $-A\omega_0 = v$ $A = -\frac{v}{\omega_0}$

以上から、求める特殊解は

$$x = -\frac{v}{\omega_0} \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad x = \frac{v}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

今日のまとめ

振動を表す微分方程式

単振動

減衰振動

強制振動

2階線形微分方程式で表され、
それを解くと振動を表す式が得られる