

2018年度秋学期 応用数学（解析） 第12回

第4部・「その先の解析学」への導入
複素関数論(1) 複素関数・正則関数

浅野 晃
関西大学総合情報学部

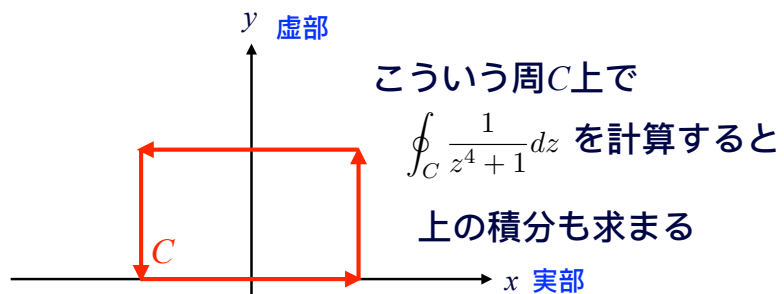


いったい
何をやるというのか🤔

こんな積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx \text{ まっとうには計算できません。}$$

そこで 数直線を 複素平面に拡張 $z = x + yi$



複素数と複素関数

複素数と複素関数

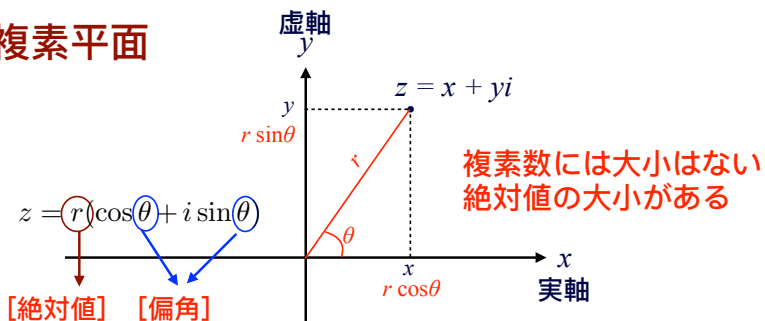
複素数 $z = x + yi$ (x, y は実数, $i = \sqrt{-1}$)

実部

虚部

複素数で定義された関数が
[複素関数]

複素平面



複素数の指数関数

実数の指数関数のテイラー展開

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

複素数の指数関数は、テイラー展開で定義する

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

すると

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + \frac{(i\theta)}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \cdots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \cdots\right) \end{aligned}$$

$\cos \theta$ のテイラー展開 $\sin \theta$ のテイラー展開

よって

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad \theta = \pi \text{ のとき} \quad e^{i\pi} + 1 = 0 \quad \text{[オイラーの等式]}$$

複素関数と微分 正則関数

複素関数の微分

複素関数の微分の定義は、実関数と同様

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

ただし、変数は複素平面上にあるのが、大きな違い

複素関数 $f(z)$ が、複素平面の領域 D で [正則]

→ $f(z)$ が D 内のどこでも微分可能

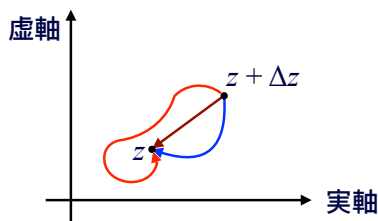
複素平面上で微分可能とは？

複素平面上での「微分可能」

複素関数 $f(z)$ が、複素平面上のある点 z で微分可能とは

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

複素平面上で
 $z + \Delta z$ が z にどのように近づいても、
極限值はひとつに定まる



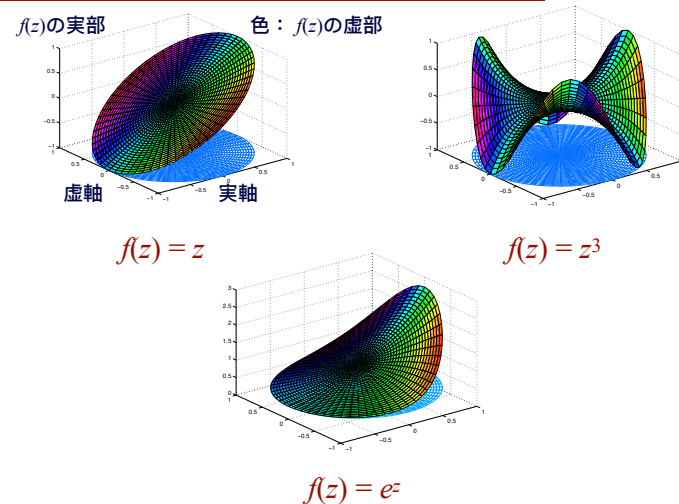
どのように近づいても、
極限值は同じ

正則関数は、
「折り目のないぐにゃ
ぐにゃの板」

2018年度秋学期 応用数学（解析）

22 - 9

正則関数を図示すると



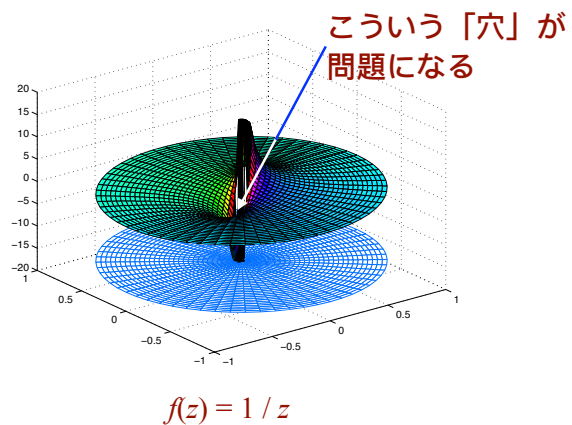
MATLABで描画

参考: <http://jp.mathworks.com/help/matlab/examples/functions-of-complex-variables.html>

2018年度秋学期 応用数学（解析）

22 - 10

正則でない例



MATLABで描画

参考: <http://jp.mathworks.com/help/matlab/examples/functions-of-complex-variables.html>

2018年度秋学期 応用数学（解析）

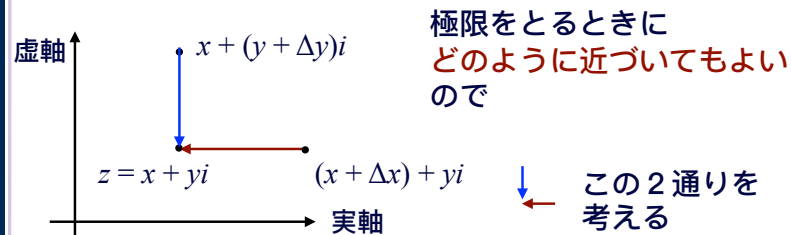
22 - 11

コーシー・リーマンの関係式

複素関数 $f(z)$ が正則である必要十分条件は

$z = x + yi$ とするとき $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ と表せるなら

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ かつ} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

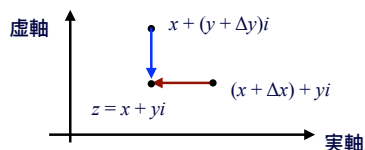


極限をとるときに
どのように近づいてもよい
ので

2018年度秋学期 応用数学（解析）

22 - 12

コーシー・リーマンの関係式



この2通りの近づき方で
極限值は等しい

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{u(x + \Delta x, y) + iv(x + \Delta x, y)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{(x + \Delta x) + yi - (x + yi)}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\{u(x, y + \Delta y) + iv(x, y + \Delta y)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{(x + (y + \Delta y)i) - (x + yi)}$$

$$= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y}$$

$$= -i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y} + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y}$$

$$-i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

これらが実部・虚部とも等しい

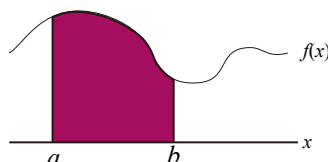
2018年度秋学期 応用数学（解析）

22 - 13

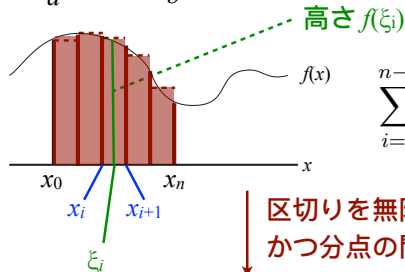
複素関数の積分

実関数の積分

この面積を
求めたい



長方形で近似



$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

区切りを無限に細かく
かつ分点の間隔の最大値 → 0

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

実関数の
積分

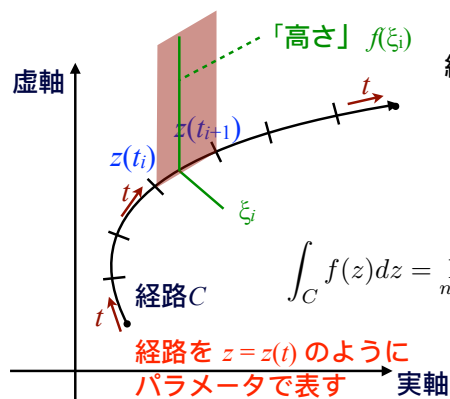
2018年度秋学期 応用数学（解析）

22 - 15

複素関数の積分

積分区間だけでなく

複素平面のどこを通過して積分するか（経路）が重要



経路の上に
「板」が載っているイメージ
(ただし「高さ」は複素数)

$$\int_C f(z)dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(z(t_{i+1}) - z(t_i))$$

$f(z)$ の経路 C に沿った積分

経路を $z = z(t)$ のように
パラメータで表す

2018年度秋学期 応用数学（解析）

22 - 16

正則関数と積分

複素関数 $f(z)$ が、領域 D での正則関数 $F(z)$ の微分なら $F'(z) = f(z)$

経路 C が両端 a, b を含めてすべて D 内にあれば

$$\int_C f(z) dz = F(b) - F(a)$$

積分は経路に依存しない

正則関数と積分

複素関数 $f(z)$ が、領域 D での正則関数 $F(z)$ の微分なら $F'(z) = f(z)$
経路 C が両端 a, b を含めてすべて D 内にあれば

$$\int_C f(z) dz = F(b) - F(a) \quad \text{積分は経路に依存しない}$$

経路 C を $z = z(t)$ で表す 両端は $z(0) = a, z(1) = b$

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_0^1 f(z(t)) \frac{dz(t)}{dt} dt \quad (\text{置換積分}) \\ &= \int_0^1 \frac{dF(z(t))}{dz} \frac{dz(t)}{dt} dt \quad (\text{合成関数の微分}) \\ &= \int_0^1 \frac{dF(z(t))}{dt} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_0^1 \frac{dF(z(t))}{dt} dt \\ &= F(z(1)) - F(z(0)) = F(b) - F(a) \end{aligned}$$

閉曲線に沿った積分

さっきの定理

複素関数 $f(z)$ が、領域 D での正則関数 $F(z)$ の微分なら $F'(z) = f(z)$
経路 C が両端 a, b を含めてすべて D 内にあれば

$$\int_C f(z) dz = F(b) - F(a) \quad \text{積分は経路に依存しない}$$

ということは、

経路 C が単純閉曲線なら、始点も終点も同じだから

$$\int_C f(z) dz = 0$$

コーシーの積分定理

閉曲線に沿った積分

複素関数 $f(z)$ が、領域 D での正則関数 $F(z)$ の微分 $F'(z) = f(z)$
経路 C が、 D 内にある単純閉曲線ならば $\int_C f(z) dz = 0$

実は

複素関数 $f(z)$ が、領域 D での正則関数で
経路 C が、 D 内にある単純閉曲線ならば

$$\int_C f(z) dz = 0 \quad \text{[コーシーの積分定理]}$$

示唆して 正則関数の微分は正則関数。
いるのは 正則関数は何度でも微分できる。

注：
「領域内で正則」
であって、
「経路上で正則」
ではない

$\oint_C f(z) dz$
閉曲線上の
積分を表す

コーシーの積分定理

コーシーの積分定理

複素関数 $f(z)$ が、領域 D での正則関数で

経路 C が、 D 内にある閉曲線ならば $\int_C f(z) dz = 0$

証明は、グリーンの定理で

$$\oint_C (P dx + Q dy) = \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

2次元関数 線積分と面積分を交換

閉曲線 C 上での (線) 積分 閉曲線 C に囲まれた領域 D' 内での (面) 積分

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ として

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \oint_C \{u(x, y) + iv(x, y)\} (dx + i dy) \\ &= \oint_C (u dx - v dy) + i \oint_C (v dx + u dy) \\ &= \iint_{D'} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_{D'} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

正則関数なので、
コーシー・リーマンの
関係式よりどちらもゼロ

2018年度秋学期 応用数学 (解析)

22 - 21

今日のまとめ

複素関数

複素数の指数関数

複素関数の微分 → 「正則関数」

複素関数の積分 (経路に沿った積分)

コーシーの積分定理

正則関数を閉曲線に沿って積分すると 0

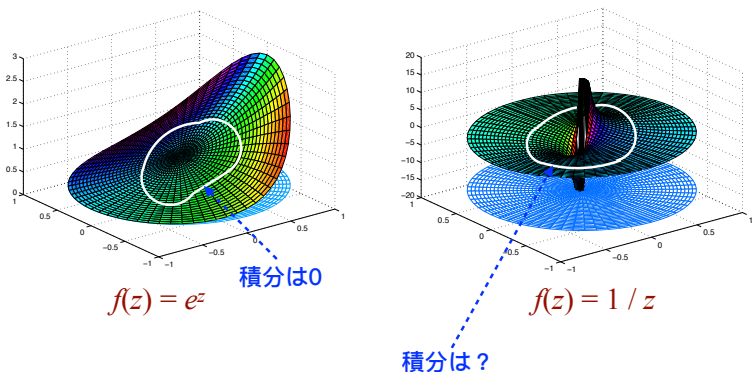
正則でない点を囲んで積分したら？

2018年度秋学期 応用数学 (解析)

22 - 22

次回に向けて

正則でない点を囲んで積分したら？



正則でない「穴」によって決まる

2018年度秋学期 応用数学 (解析)

22 - 23