2018年度秋学期　応用数学（解析）　第１３回

第４部・「その先の解析学」への導入

複素関数論(2) 孤立特異点と留数

浅野　晃

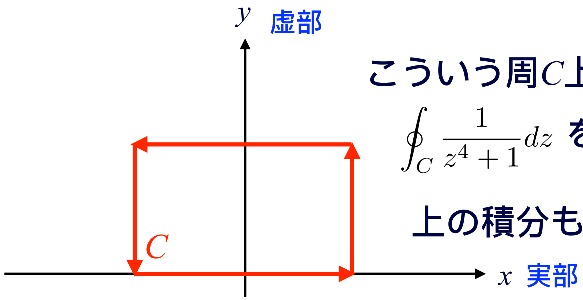
関西大学総合情報学部

なにをするんでしたっけ？🤔

こんな積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}dx$$ まっとうには計算できません。

そこで　数直線を　複素平面に拡張 $z = x + yi$



こういう周C上で

$$\oint_C \frac{1}{z^4+1}dz$$ を計算すると

上の積分も求まる

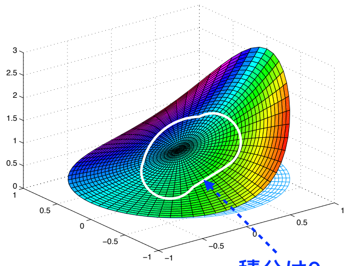
前回の復習
コーシーの積分定理

A. Asano, Kansai Univ.

コーシーの積分定理

複素関数 $f(z)$ が，領域 D での正則関数で
経路 C が，D 内にある単純閉曲線ならば

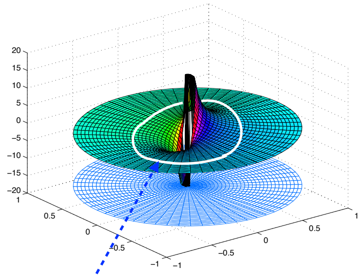
$$\int_C f(z)dz = 0$$



A. Asano, Kansai Univ.

ここからの話は

正則でない点を囲んで積分したら？



正則でない「穴」によって決まる

A. Asano, Kansai Univ.

$f(z) = z^n$ の積分

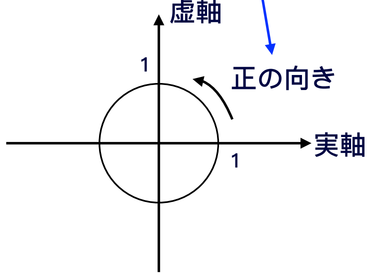
A. Asano, Kansai Univ.

z^n の積分を考える

関数をべき級数で表して
各項の積分を考えるため

$f(z) = z^n$ を，単位円周C に沿って正の向きに
回って積分する

複素平面において
原点を中心とする
半径１の円周



A. Asano, Kansai Univ.

z^n の積分を考える

$n = 0, 1, 2, \ldots$ のとき

$f(z) = z^0, z^1, z^2, \ldots$ は単位円周 C の内部で正則

コーシーの積分定理により $\oint_C f(z)dz = 0$

A. Asano, Kansai Univ.

z^n の積分を考える

$n = -1, -2, -3, \ldots$ のとき

ややこしいので，あらためて

$f(z) = \dfrac{1}{z^n}$ とおいて $n = 1, 2, 3, \ldots$ とする

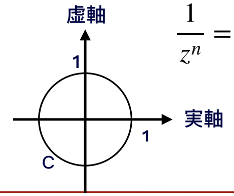
置換積分

経路 C 上では $z = e^{i\theta}$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$

$$\oint_C f(z)dz = \int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\frac{dz}{d\theta}d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} ie^{i\theta} d\theta$$
$$= i\int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta} d\theta$$

つまり

$$\frac{1}{z^n} = \frac{1}{(e^{i\theta})^n} = e^{-in\theta}$$



A. Asano, Kansai Univ.

z^n の積分を考える

$f(z) = \dfrac{1}{z^n}$ について $n = 1$ のとき

n = 1

$$\oint_C \frac{1}{z}dz = i\int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta} d\theta$$
$$= i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

$n = 2, 3, \ldots$ のとき

$$\oint_C \frac{1}{z^n}dz = \frac{i}{i(1-n)}\left[e^{i(1-n)\theta}\right]_0^{2\pi}$$
$$= \frac{1}{1-n}\left[e^{2(1-n)\pi i} - 1\right]$$

$e^{2(1-n)\pi i} = \cos(2(1-n)\pi) + i\sin(2(1-n)\pi) = 1$ より $\oint_C \frac{1}{z^n}dz = 0$

A. Asano, Kansai Univ.

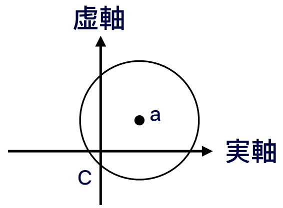
z^n の積分を考える

つまり

$$\oint_C \frac{1}{z}dz = 2\pi i \qquad \oint_C \frac{1}{z^n}dz = \begin{cases} 2\pi i & n = 1 \\ 0 & n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

また，a を中心とする半径1の円周を C とすると

$$\oint_C \frac{1}{(z-a)^n}dz = \begin{cases} 2\pi i & n = 1 \\ 0 & n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$



コーシーの積分公式

A. Asano, Kansai Univ.

コーシーの積分公式

正則関数の任意の点での値は，
その点を囲む閉曲線上の値だけできまる

領域 D で正則な関数fの点 z における値 $f(z)$ は，
D 内で点 z を囲み，正の方向に 1 周する閉曲線 C 上の積分

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \qquad \text{で表される}$$

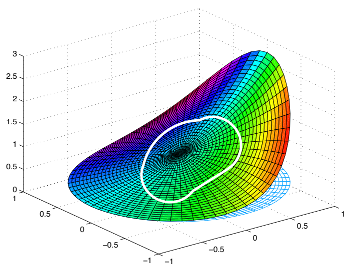
$z = 0$ のときは
原点を囲み，正の方向に 1 周する閉曲線 C 上の積分

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta \qquad \text{で表される}$$

A. Asano, Kansai Univ.

コーシーの積分公式

正則関数の任意の点での値は，
その点を囲む閉曲線上の値だけできまる



$f(z) = e^z$

正則関数は
「折り目なく」
曲がっているから，

周囲（囲む閉曲線上）の
値によって
その中心の値が決まって
しまっても不思議ではない

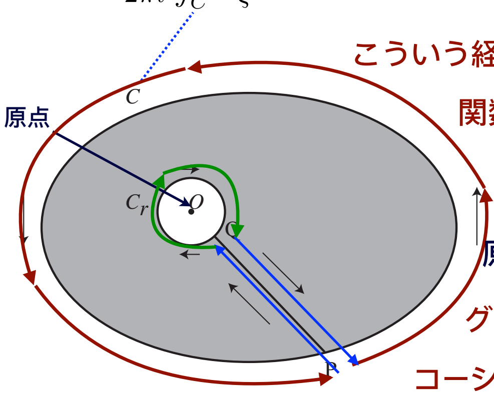
A. Asano, Kansai Univ.

コーシーの積分公式

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta$$ のほうの証明を考える

こういう経路で

関数 $\frac{f(\zeta)}{\zeta}$ を積分



原点では正則でないが

グレーの部分では正則

コーシーの積分定理により，
積分 = 0

A. Asano, Kansai Univ.

A. Asano, Kansai Univ.

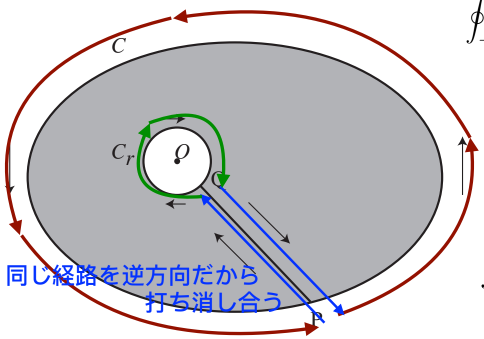
コーシーの積分公式

グレーの部分では正則　コーシーの積分定理により，

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta + \int_P^Q \frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta + \oint_{-C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta + \int_Q^P \frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta = 0$$

C とは逆回りだからマイナス

$$\oint_{-C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta = -\oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta$$



つまり

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta = \oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta$$

A. Asano, Kansai Univ.

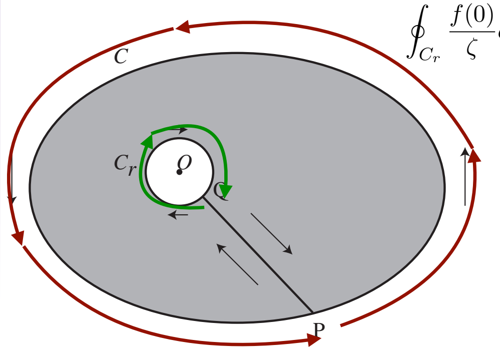
コーシーの積分公式

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta = \oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta$$

内側の円の半径→0とすると

$$\oint_{C_r} \frac{f(0)}{\zeta}d\zeta$$ に収束する（詳細略）

$$\oint_{C_r} \frac{f(0)}{\zeta}d\zeta = f(0)\oint_{C_r} \frac{1}{\zeta}d\zeta = 2\pi i f(0)$$



よって

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta$$

A. Asano, Kansai Univ.

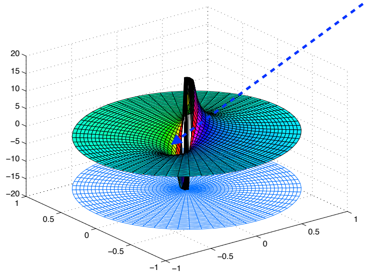
孤立特異点と ローラン級数展開

A. Asano, Kansai Univ.

ここからの見通し

孤立特異点とは

こういう，正則関数にあいた「穴」
（1 点を除いて正則）

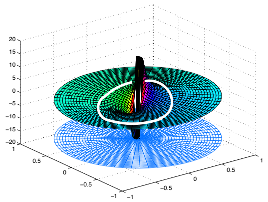


$f(z) = 1 / z$

ここからの見通し

孤立特異点をもつ関数について

孤立特異点の周りの積分を使って
関数が級数に展開できる（ローラン級数展開）



ローラン級数を
積分することで

孤立特異点の周りの
積分は「留数」だけで
表されることがわかる

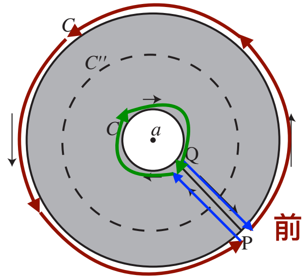
留数を別途求められれば，積分が簡単に求まる

ローラン級数展開

孤立特異点の周りの経路で積分

前と同じ考えで，コーシーの積分公式より

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$



前と同じ経路で

ローラン級数展開

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

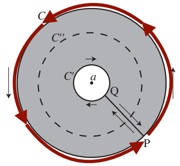
等比級数の形

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{1}{\zeta - a}\,\frac{1}{1 - \dfrac{z-a}{\zeta - a}}$$

絶対値が１より小さく，収束する

ζは外側の経路上だから

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a}\left\{1 + \frac{z-a}{\zeta - a} + \left(\frac{z-a}{\zeta - a}\right)^2 + \cdots\right\}$$



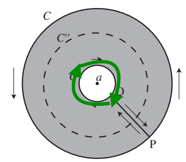
ローラン級数展開

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a}\left\{1 + \frac{z-a}{\zeta - a} + \left(\frac{z-a}{\zeta - a}\right)^2 + \cdots\right\}$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{-1}{\zeta - a}\left\{1 + \frac{\zeta-a}{z - a} + \left(\frac{\zeta-a}{z - a}\right)^2 + \cdots\right\}$$

こちらのζは内側の経路上



ローラン級数展開

以上から

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots + a_{n-1}(z-a)^{n-1} + a_n(z-a)^n + \cdots$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C'} f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta \quad (n = 1, 2, \dots)$$

孤立特異点 a のまわりのローラン級数

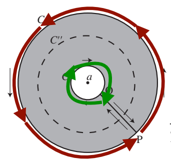
ローラン級数展開

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots + a_{n-1}(z-a)^{n-1} + a_n(z-a)^n + \cdots$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C'} f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ところで



グレーの部分で $f(z)$ は正則なので，コーシーの積分定理より

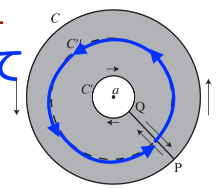
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C'} f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta = 0$$

よって，a_{-n} も a_n で表すことができて

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)(\zeta-a)^{-n-1}d\zeta \quad (n = 0, \pm1, \pm2, \dots)$$

留数と「n位の極」

留数



関数 $f(z)$ をローラン級数展開して C'' に沿って積分

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots + a_{n-1}(z-a)^{n-1} + a_n(z-a)^n + \cdots$$

積分するとここしか残らない
ここの積分は $2\pi i$

つまり

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C''} f(z)dz$$

$f(z)$ の孤立特異点 a における［留数 (residue)］という　$\mathrm{Res}(a; f)$

留数を別の方法で求められれば，
$f(z)$ の積分は簡単に計算できる

「n位の極」

ローラン級数が（左側が…でなくて）
a_{-n} から始まるような孤立特異点を，
［n位の極］という

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots$$

このとき，両辺を $(z-a)^n$ 倍すると

$$(z-a)^n f(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z-a) + \cdots + a_{-1}(z-a)^{n-1} + a_0(z-a)^n + \cdots$$

つまり，$\lim_{z \to a} (z-a)^n f(z) = a_{-n}$

a が1位の極なら $\lim_{z \to a} (z-a) f(z) = a_{-1}$

「n位の極」と留数

さて，a が n位の極のとき，

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots$$

両辺を $(z-a)^n$ 倍して

$$(z-a)^n f(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z-a) + \cdots + a_{-1}(z-a)^{n-1} + a_0(z-a)^n + \cdots$$

両辺を $(n-1)$ 回微分すると

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z-a)^n f(z) = (n-1)!a_{-1} + \frac{n!}{1!}a_0(z-a) + \frac{(n+1)!}{2!}a_1(z-a)^2 + \cdots$$

微分によって，a_{-1} の手前の項まで消える

「n位の極」と留数

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z-a)^n f(z) = (n-1)!a_{-1} + \underbrace{\frac{n!}{1!}a_0(z-a) + \frac{(n+1)!}{2!}a_1(z-a)^2 + \cdots}_{}$$

$z \to a$ とすると，これらの項は0

つまり留数は

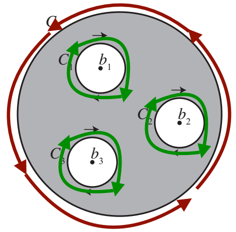
$$\mathrm{Res}(a; f) = a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z-a)^n f(z)$$

1位の極なら　$\mathrm{Res}(a; f) = a_{-1} = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)$

以上から，
孤立特異点を囲んだ閉曲線上の $f(z)$ の積分は
留数で表され，

しかもn位の極については，留数は別途求まる
ので，積分は求まる

孤立特異点がいくつあっても



$$\oint_C f(z)dz - \oint_{C_1} f(z)dz - \oint_{C_2} f(z)dz - \cdots = 0$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz = \mathrm{Res}(b_1; f) + \mathrm{Res}(b_2; f) + \cdots$$

いくつかの孤立特異点を囲んだ
閉曲線上の積分は，
それぞれの孤立特異点での
留数がわかれば求められる

A. Asano, Kansai Univ.

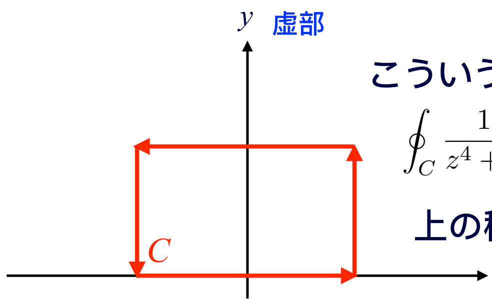
ようやく，最初の問題へ

A. Asano, Kansai Univ.

こんな積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4+1}dx$$ まっとうには計算できません。

そこで　数直線を　複素平面に拡張 $z = x + yi$



こういう周 C 上で

$$\oint_C \frac{1}{z^4+1}dz$$ を計算すると

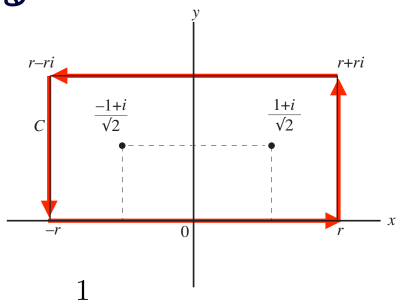
上の積分も求まる

A. Asano, Kansai Univ.

複素関数にして積分する

$$\oint_C \frac{1}{z^4+1}dz$$ を計算する

経路は



$$\frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{(z-\frac{1+i}{\sqrt{2}})(z-\frac{-1+i}{\sqrt{2}})(z-\frac{-1-i}{\sqrt{2}})(z-\frac{1-i}{\sqrt{2}})}$$

孤立特異点 $\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ は，すべて1位の極

展開するまでもなく

A. Asano, Kansai Univ.

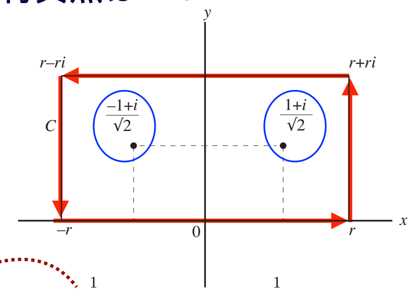
複素関数にして積分する

経路の内部にある孤立特異点は２つ

それぞれ留数を求める

1位の極だから

$$\mathrm{Res}(a; f) = a_{-1} = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$$



$$\mathrm{Res}(\frac{1+i}{\sqrt{2}}; f) = \lim_{z\to\frac{1+i}{\sqrt{2}}}\cancel{(z-\frac{1+i}{\sqrt{2}})}f(z)$$

$$\frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{\cancel{(z-\frac{1+i}{\sqrt{2}})}(z-\frac{-1+i}{\sqrt{2}})(z-\frac{-1-i}{\sqrt{2}})(z-\frac{1-i}{\sqrt{2}})}$$

$$= \frac{1}{(\frac{1+i}{\sqrt{2}}-\frac{-1+i}{\sqrt{2}})(\frac{1+i}{\sqrt{2}}-\frac{-1-i}{\sqrt{2}})(\frac{1+i}{\sqrt{2}}-\frac{1-i}{\sqrt{2}})}$$

$$= \frac{-1-i}{4\sqrt{2}}$$

同様に $\mathrm{Res}(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}; f) = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}$

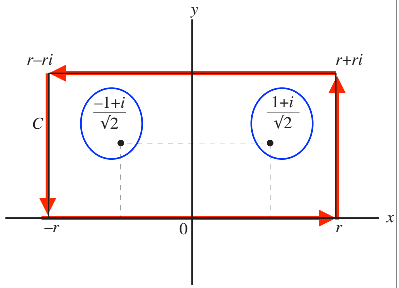
A. Asano, Kansai Univ.

複素関数にして積分する

よって $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C f(z)dz = \mathrm{Res}(\frac{1+i}{\sqrt{2}}; f) + \mathrm{Res}(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}; f) = -\frac{i}{2\sqrt{2}}$

$$\oint_C \frac{1}{z^4+1}dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

では $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}dx$ は？



$r \to \infty$ のとき，
実軸上以外は0
（略，テキストで）

よって $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

A. Asano, Kansai Univ.

今日のまとめ

孤立特異点とローラン級数展開

孤立特異点の周りの積分を使って
関数を級数に展開することができる

留数

ローラン級数の形で積分すると
孤立特異点の周りの積分は留数で表せる

留数を使って積分を求める

n位の極については，留数を別の方法で
求めることで，積分が簡単に求められる