

今日は、「行列」や「ベクトル」の考え方の基本を、高校で習っていない人向けに手短かに解説します。

## ベクトルと行列の計算

### ベクトル

次回（第7回）のテキストでは、「画素が2つしかない画像」を考えて、その画素値  $x_1, x_2$  を

$$z = a_1x_1 + a_2x_2 \quad (1)$$

という式で画素値  $z$  に変換する、という話が出てきます。これを、「ベクトル」の書き方では、次のように書きます。

$$z = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

右辺の左側の  $()$  を**行ベクトル**、右側の  $()$  を**列ベクトル**とといいます。また、この計算はベクトル同士のかけ算の一種で、**内積**とといいます。このように数字を  $()$  に入れて並べるだけで、上の (1) 式の計算をしたことになります。

### 問題 1

次のベクトルの計算をしてください。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (3)$$

(解答例)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \times 3 + 2 \times 4 = 3 + 8 = 11$$



### 行列

最初の「画素が2つしかない画像」 $x_1, x_2$  を、別の「画素が2つしかない画像」次に、上の (1) 式のような計算が2組ある場合を考えます。もともとの画素値が  $x_1, x_2$  の2つの組だったので、これを別の2つの画素値の組に、2組の計算で変換する場合にあたります。このとき、それぞれの組を添字 (1) と (2) で区別して、変換後の画素値  $z_{(1)}, z_{(2)}$  を求める計算を、ベクトルで表すと

$$\begin{aligned} z_{(1)} &= \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ z_{(2)} &= \begin{pmatrix} a_{1(2)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

となります<sup>1</sup>。この2つの式をひとつにまとめて、次のように書きます。

$$\begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} \\ a_{1(2)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

<sup>1</sup>ふつうは、添字にこのようなカッコはつけず、 $a_{11}, a_{21}$  のように書きます。ここでは、添え字の意味をわかりやすくするために、このようにカッコをつけて書いています。

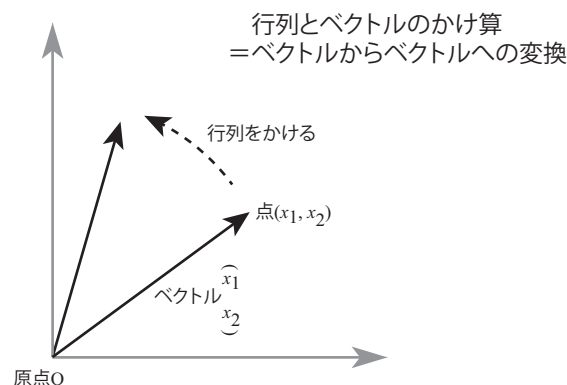


図 1: 行列とベクトルのかけ算.

この式の右辺にある、数の4つ入った  $()$  を**行列**といい、右辺の計算を「行列とベクトルのかけ算」といいます。行ベクトルが列になって並んでいるので、行列とよぶわけです。

## 問題 2

次の行列とベクトルの計算をしてください。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

(解答例)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times 2 + 1 \times 1 \\ 1 \times 2 + 2 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

■

## 行列、ベクトルと座標平面

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  を座標平面でのある点と考えると、(5) 式の計算は、 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  という点を  $\begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \end{pmatrix}$  という点に移動する計算を表す、ということもできます。また、このときベクトルという言葉を使うと、「 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  は原点から点  $(x_1, x_2)$  をさすベクトル（位置ベクトル）である」といいます。図形的には、原点から点  $(x_1, x_2)$  まで伸びた矢印を想像すればよいでしょう。この言い方をすると、行列とベクトルのかけ算は、ベクトルをベクトルに変換する計算ということができます（図1）。

## 問題 3

問題 2 のベクトル  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  と、問題 2 の計算結果のベクトルを、座標平面に図示してください。

(解答例) 図 2 の通りです。■

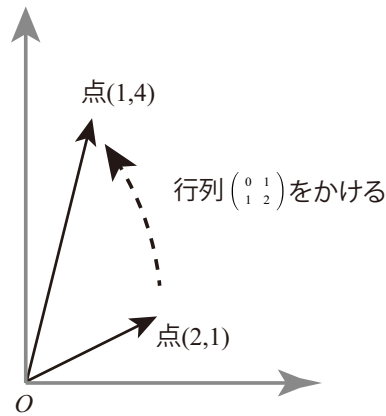


図 2: 問題 3 の解答例.

## 行列と行列のかけ算

次回（第 7 回）のテキストには,

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

という形の式も出てきます。ここで、右辺の  $\lambda$  は普通の数（スカラー）で、このとき右辺は  $\begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}$  を表します。

次回のテキストでは、この式を満たす  $a_1, a_2$  は 2 組あるので、 $\lambda$  もそれぞれに対応して 2 つある、という話になっています。それらを  $\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}$  と表すと、それぞれに対応する式は

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix} = \lambda_{(1)} \begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix} = \lambda_{(2)} \begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix} \quad (9)$$

と表されます。

では、今度はこれらの 2 つの式を、ひとつにまとめて表してみましょう。列ベクトル  $\begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix}$  と  $\begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix}$  を左右にくっつけて、 $\begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix}$  と、ひとつの行列で表します。すると、(8) 式、(9) 式の 2 つの式は、まとめて

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} \end{pmatrix} \quad (10)$$

と表すことができます。このように、2 つの「行列とベクトルのかけ算」をひとつの式に書いたのが、「行列と行列のかけ算」です。

本当にそうになっていることを確かめてみましょう。(10) 式の左辺は、上で述べたとおり、

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

のように列ベクトルを左右にくっつけたものです。

一方、(10) 式の右辺も、右側の行列を列ベクトルに分けて

$$\begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{(2)} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

と表すと、左側の行列  $\begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix}$  と右側の行列の左側の列ベクトル  $\begin{pmatrix} \lambda_{(1)} \\ 0 \end{pmatrix}$  の積は

$$\begin{pmatrix} \lambda_{(1)} a_{1(1)} + 0 \cdot a_{1(2)} \\ \lambda_{(1)} a_{2(1)} + 0 \cdot a_{2(2)} \end{pmatrix} \text{ すなわち } \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} a_{1(1)} \\ \lambda_{(1)} a_{2(1)} \end{pmatrix} = \lambda_{(1)} \begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix}$$

となります。右側の列ベクトルについても同様です。このように、(行列×列ベクトル) のかけ算を2つ同時に行うのが、行列のかけ算です。

#### 問題 4

次の行列と行列の計算をしてください。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

(解答例) 右側の行列を、 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  と  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  の2つのベクトルに分けます。ひとつめのベクトルに対しては

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times 2 + 1 \times 1 \\ 1 \times 2 + 2 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

となり、ふたつめのベクトルに対しては

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times 1 + 1 \times 0 \\ 1 \times 1 + 2 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となります。よって、これらの2つのベクトルを並べて

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

となります。■

#### 要素が $p$ 個あるベクトルの場合

ここまででは、「画素が2つしかない画像」を考えたところから出発して、2つの要素からなるベクトルについての計算を考えてきました。では、「要素が  $p$  個あるベクトル」の場合を考えてみましょう。

(8) 式, (9) 式の形の式を, 要素が  $p$  個の場合に表すと,

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} \quad (12)$$

となります。また, (10) 式を, 要素が  $p$  個のベクトルの場合に表すと,

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & & & 0 \\ & \lambda_{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{(p)} \end{pmatrix} \quad (13)$$

となります。

こんな式は, 大変複雑でとても扱いきれません。また, 要素が  $p$  個ある場合は, ベクトルも  $p$  次元空間での「矢印」になり, 2次元の場合のように図形的に考えることもできません。

そこで, (13) 式の各行列をそれぞれひとつの文字で表して,

$$SP = PA \quad (14)$$

と表してしまいます。こうしてしまうと, 2次元でも  $p$ 次元でも変わりはありません。このように, **複雑な計算をあたかも数の計算のように表して, 単純な形で理解しようというのが, 行列というものが考えられた理由**です。

ただし, 行列のかけ算では, 積  $AB$  と積  $BA$  は同じとは限りません。すなわち, 数のかけ算とは違って, かける順番が問題になります。

## 転置行列と対称行列

**転置行列**とは, ある行列の行と列を入れ替えたもので, 例えば行列  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  の転置行列は  $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  です。行列  $A$  の転置行列を,  ${}^tA, A^t, A^T, A'$  などと表します。今回の講義のプリントでは最後の  $A'$  を使っていますが, これは統計学の教科書に多い方式です。さらに, ある行列とその転置行列が同じとき, その行列を**対称行列**といいます。

### 問題 5

1.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  の転置行列を求めてください。
2.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  と  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  は, それぞれは対称行列ですか。

(解答例)

1.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  です。
2.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  の転置行列は  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  で、もとの行列とは異なるので、対称行列ではありません。一方、
3.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  の転置行列は  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  で、もとの行列と同じなので、これは対称行列です。■

## 逆行列と単位行列

さきほど「行列と行列のかけ算」を説明しましたが、行列には「割り算」はありません。そのかわりにあるのが**逆行列**です。

数の割り算で、例えば「2 で割る」という計算は、「 $\frac{1}{2}$  をかける」のと同じです。この2つの数字は、 $2 \times \frac{1}{2} = 1$  で、「かけると1」という関係になっています。この“1”は、「かけても何もおこらない数」で、**単位元**といいます。

これと同じように、「かけても何もおこらない行列」を考えます。これを**単位行列**といい、 $I$  で表します。つまり、単位行列  $I$  は、どんな行列  $X$  に対しても  $XI = IX = X$  となる行列のことです。そして、行列の  $A$  の逆行列  $A^{-1}$  とは、 $AA^{-1} = A^{-1}A = I$  となる行列のことで、「かけると  $I$ 」という関係になっています。つまり、逆行列  $A^{-1}$  をかけることが、あたかも「行列  $A$  で割る」のと同じような計算になっています。例えば、行列の積  $XA$  に右から  $A^{-1}$  をかけると  $XAA^{-1} = X$  となり、「 $A$  で割った」のと同じことになっているのがわかります。

また、(14) 式の  $SP = P\Lambda$  という関係は、逆行列を使うと

$$P^{-1}SP = \Lambda \quad (15)$$

とも表されます。

単位行列の中身は、左上から右下に向かう対角線上の数（対角成分）がすべて1、他はすべて0になります。2次元の場合、 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  が単位行列です。

## 直交行列

**直交行列**とは、逆行列が転置行列と同じであるような行列です。つまり、行列  $R$  が

$$R'R = RR' = I \quad (16)$$

のとき、 $R$  は直交行列です。

「直交行列」という名前は、直交行列に含まれる各列ベクトルが互いに直交していて、いずれも大きさが1であることをさしています。このことを、各列ベクトルが**正規直交基底**をなす、といいます。

もともと直交している2つのベクトルを直交行列で変換すると、それぞれを変換したベクトルもやはり直交しています。図形的には、直交座標の座標軸を直交したまま回転する計算は、直交行列をかける計算で表されます（図3）。

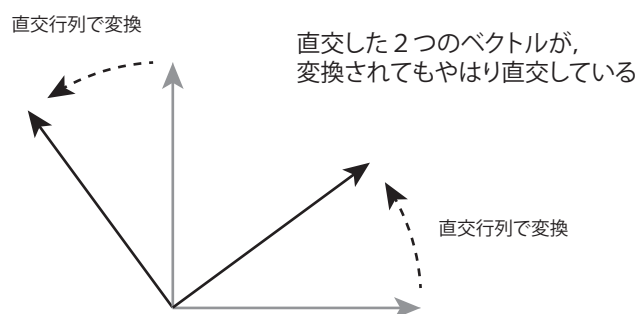


図 3: 直交行列によるベクトルの変換.

## 問題 6

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

が直交行列であることを確かめてください。

(解答例) 次のとおりです。

$$\begin{aligned} R'R &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \times 1 + (-1) \times (-1) & 1 \times 1 + (-1) \times 1 \\ 1 \times 1 + 1 \times (-1) & 1 \times 1 + 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} RR' &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 1 & (-1) \times 1 + 1 \times 1 \\ 1 \times (-1) + 1 \times 1 & (-1) \times (-1) + 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \end{aligned} \quad (19)$$

■

## 問題 7

- ベクトル  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  と  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  が直交していることを、図に描いて確認してください。
- 座標軸の  $x$  軸はベクトル  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  で、 $y$  軸はベクトル  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  で、それぞれ表されます。これらのベクトルを直交行列  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  で変換して、変換後のベクトルも直交していることを図で確認してください。

(解答例)

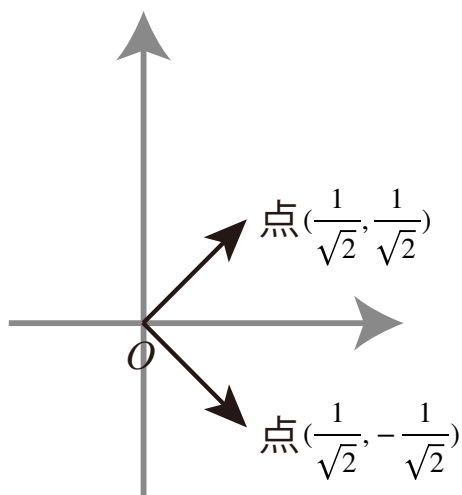


図 4: 問題 7-1.

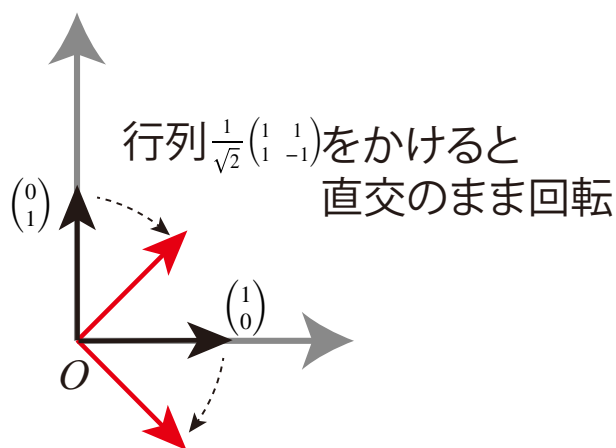


図 5: 問題 7-2.

1. 図 4 のとおりで、この 2 つのベクトルは直交しています。
2.  $x$  軸をこの行列で変換すると

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

で、 $y$  軸をこの行列で変換すると

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

です。つまり、この行列の 2 つの列ベクトルがそのまま取り出されます（上で出てきた「単位行列」を思い出してください）。したがって、図 5 のように、 $x, y$  軸が、直交したまま 45 度回転したものに変換されたということが出来ます。■