2019 年度秋学期　画像情報処理　第２回

第１部・画像のサンプリングと周波数／ 空間周波数とフーリエ級数

第１部では，まずデジタル画像の成り立ちについて説明します。画像は本来輝度が連続的に分布したものですが，コンピュータで取り扱うにはこれを離散的な画素の集まりに直し，さらに各画素の輝度を整数で表現する必要があります。離散的な画素を得ることをサンプリング (標本化，sampling) といい，輝度を整数で表現することを量子化 (quantization) といいます。サンプリングする際には，どのくらいの細かさでサンプリングするかが問題になり，「細かさ」を評価する必要があります。細かさを表すのに必要なのが**空間周波数**の考え方です。空間周波数と，それを求めるための計算である**フーリエ変換**について，第１部で説明します。

光の回折と結像

まず，「画像の生成」という現象から考えてみましょう。画像を得るには，肉眼にしてもカメラにしても，レンズによる結像という現象が必要です。この現象は，物体の各点から四方八方に出た光が，レンズによって再び点に集められることです。これを別の観点から，次のように見ることができます。

回折

光には**回折** (diffraction) という現象があります。回折とは，波が進路を遮られたときに，光が遮へいの裏側へ回り込むことです。例えば，水面の波を板で遮っても，波は板の裏側にまで達します。光は空間の電磁気的な歪みによって生じる波，すなわち電磁波の一種ですから，やはりこの現象を生じます。ラジオ電波は，放送局との間に障害物があっても，回折によって障害物の裏側に届きます。

回折格子

さて，透過率が周期的に変化している物体，つまり格子状に明暗の帯が並んでいる物体−**回折格子** (diffraction grating) といいます−を光が通過すると，ある帯を通った光が隣の暗部の裏側に回り込みます。このとき，各帯を出た光はあちこちに散らばりますが，隣り合う帯を同時に出た光の波が，１波長分の長さだけずれて重なる方向では，各波の山と山が重なって強めあうので，この方向には強い光（**1 次回折光**）が出ます。

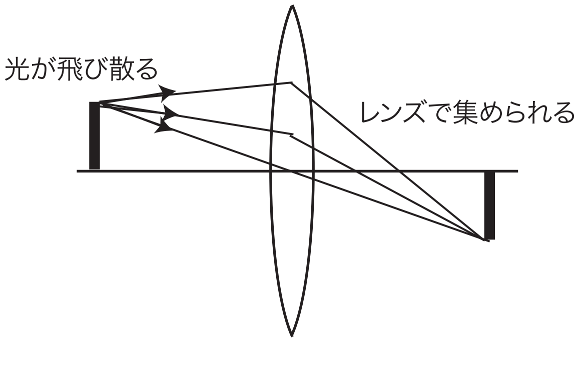

図 1: 結像.

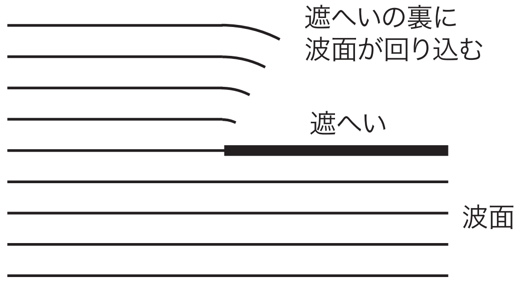

図 2: 回折.

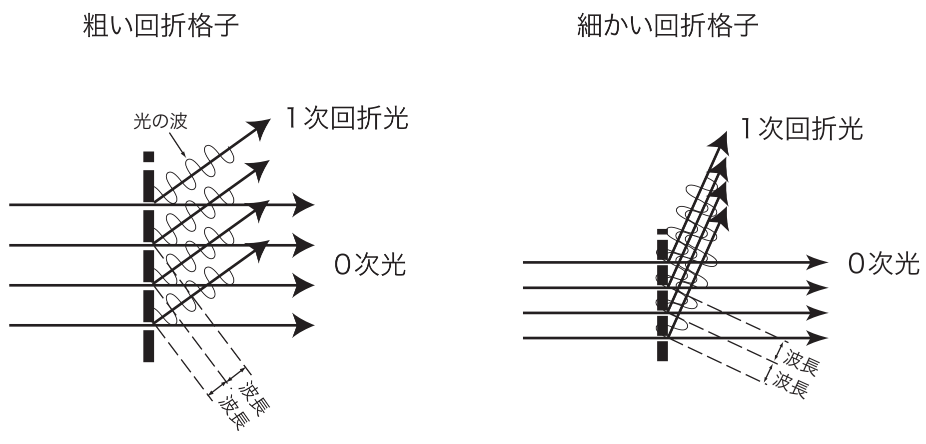

図 3: 回折格子と 1 次回折光.

図 3 のように，波長が同じであっても，「光の波が 1 波長分の長さだけずれて重なる方向」は，隣り合う帯の間隔によって変わります。回折格子の隣り合う帯の間隔が狭い，すなわち回折格子の明暗の周期が細かいと，１次回折光の方向と，入射光がそのまま通り抜けた光（**0次光**）とがなす角は大きくなります。

明暗の波が黒（透過率 0%）と透明（透過率 100%）だけでできている場合は，回折光は 1 次回折光以外にいくつかの方向に現れますが，明暗の変化が正弦波状になっている場合は，１次回折光以外の回折光は打ち消し合い，１次回折光のみが現れることが知られています。

物体を「回折格子の重ね合わせ」と考えると

そこで，いま透明なフィルムに何か絵が描いてあって，これを背後から平行光で照明するとします[1]。このとき，フィルム上の絵がたくさんの「正弦波状の明暗」，すなわちたくさんの回折格子の重ね合わせになっていると考えましょう。そうすると，各正弦波は回折格子としてはたらきます。各回折格子は入射光を回折し，各方向に 1 次回折光を出します。細かい周期の回折格子は大きい角度に，粗い周期の回折格子は小さい角度に 1 次回折光を出します。結像レンズにこれらの光を通すと，各々の 1 次回折光はレンズによって曲げられ，像面で 0 次回折光と再び出会い，両方の光の波が重なりあいます。このとき，波の山と山が重なると強め合って明るくなり，山と谷が重なると弱め合って暗くなる**干渉** (interference) という現象をおこします。方向の異なる２つの光の波が重なり合うと，山と山が重なる部分と，山と谷が重なる部分が交互に繰り返し，像面には明暗の縞（干渉縞）が生じます。干渉縞は 1 次回折光の角度が大きいほど細かくなり，フィルム上の「正弦波状の明暗」が像面に再現されます。

空間周波数

さて，結像の過程をこのようにとらえると，フィルム上の絵は，どの程度の細かさの明暗の正弦波がどのくらいの振幅（明暗の変化の度合）で含まれているか，という観点でとらえることができます。この波の細かさのことを**空間周波数** (spatial frequency) といいます。空間周波数は明暗の細かさを表すもの

[1]以下の説明はレーザーなどのコヒーレント光で照明した場合のもので，通常の光の場合はもう少し複雑です。

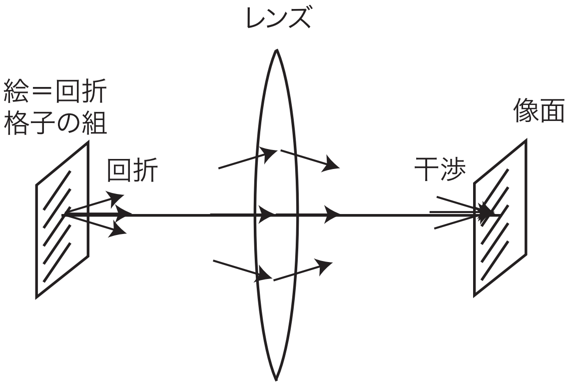

図 4: 回折と干渉による結像.

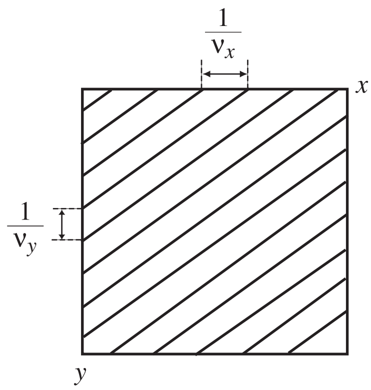

図 5: 空間周波数.

ですから，「単位長さあたりの明暗の交代の回数」で定義されます。MKSA 単位系では単位は cycle/m となります。

ここで，各回折格子は平面上の波であることに注意しましょう。平面上の波には方向があります。そこで，空間周波数は x 方向の周波数 ν_x と y 方向の周波数 ν_y との２つの量の組で表されます。

このように考えたとき，フィルム上の絵はさまざまな空間周波数の波の組み合わせで表されるわけですが，このとき各空間周波数の波の振幅を**空間周波数成分**といいます。

フーリエ級数

前節ではフィルム上の絵を空間周波数成分に分解できるとしたわけですが，果たしてそんなことができるのでしょうか？ それを実際に行うのが**フーリエ変換** (Fourier transformation) です。

フーリエ変換の原理を，次のような考え方で見てみましょう。フィルム上の絵は，何らかの関数と考えることができます。

周期関数を，三角関数の重ね合わせで表す

ここからは，簡単のため，まず１次元の関数で考えます。１次元の座標を x としましょう。関数 $f(x)$ を，周期 L の周期関数，すなわち間隔 L で同じ形を繰り返す関数であるとしましょう。これがさまざまな周波数の正弦波の重ね合わせでできていると仮定してみます。このとき，重ね合わされるそれぞれの波も，いずれも周期 L で繰り返す波でなければならないはずです。そうでなければ，x を先へ進めていくと，重ね合わされる波がだんだんずれていってしまうからです。

周期 L の波には，基本周期が L である波だけでなく，基本周期が $L/2, L/3, L/4, \ldots$ のように $L/$(整数) である波もあります。周期が $L/$(整数) の波は，整数の個数と同じだけありますが，それぞれの基本周期はとびとび（離散的）ですから，これらの波の数はたとえ無限個であっても「数えることのできる無限個」（可算無限個）です。いいかえれば，「重ね合わせ」を無限個の項の和の形（級数）で書くことができる，ということになります。

周波数と各周波数

周期 L/n の正弦波は，指数関数を使って $\exp(i2\pi\dfrac{n}{L}x)$ と表すことができます[2]。ここで，i は虚数単位を表します。2π をかけているのは，L/n が周期であることから，n/L が「単位時間あたり何周期分の波が入っているか」すなわち**周波数**を表しているので，これに 2π をかければ「単位時間あたり何ラジアン位相が進むか」を表すといいかえることができるからです。$2\pi(n/L)$ を**角周波数** (angular frequency) ということもあります。

このような指数関数による表現を用いると，関数 $f(x)$ は，次のような級数で表されます。

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi\frac{n}{L}x\right) \tag{1}$$

内積と直交関数系

さて，上の指数関数には，「同じ基本周期の波をかけあわせて，周期 L にわたって積分したときは 0 にならず，異なる基本周期の波をかけあわせて積分すると 0 になる」という性質があります。なぜならば，この積分は，m, n を整数として

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \exp\left(i2\pi\frac{m}{L}x\right)\exp\left(-i2\pi\frac{n}{L}x\right)dx = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \exp\left(i2\pi\frac{m-n}{L}x\right)dx \tag{2}$$

と表され[3]，$m \neq n$ のときは，この積分は

$$\begin{aligned} &\frac{1}{i2\pi\frac{m-n}{L}}\left[\exp\left(i2\pi\frac{m-n}{L}x\right)\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \\ &= \frac{1}{i2\pi\frac{m-n}{L}}\left\{\exp\left(i2\pi\frac{m-n}{L}\frac{L}{2}\right) - \exp\left(-i2\pi\frac{m-n}{L}\frac{L}{2}\right)\right\} \\ &= \frac{L}{m-n}\sin\pi(m-n)L = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

であり，$m = n$ のときは

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \exp(0)dx = [x]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = L \tag{4}$$

となるからです。この積分を 2 つの波の**内積**とよびます。また，このような性質をもつ関数のグループを**直交関数系**とよびます。直交関数系については，第 2 部で画像情報圧縮について説明するときに，再び取り扱います。

級数の各項の係数は？

さて，関数 $f(x)$ と上の指数関数を使って，次の計算をしてみましょう。k は整数とします。

$$\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)\exp\left(-i2\pi\frac{k}{L}x\right)dx \tag{5}$$

---

[2]波と指数関数の関係については，付録を参照してください。

[3]$\exp\left(-i2\pi\dfrac{n}{L}x\right)$ のほうの i の前に $-$ がついているのは，複素共役をとっているためです。

$f(x)$ は (1) 式の級数で表されますから，上の積分は

$$\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\exp\left(i2\pi\frac{n}{L}x\right)\exp\left(-i2\pi\frac{k}{L}x\right)dx \tag{6}$$

となりますが，上で示した直交性から，級数のうち周期が k/L の項以外は積分すれば 0 であり，その結果，(5) 式の積分は

$$\frac{1}{L}\cdot La_k = a_k \tag{7}$$

となります。このことは，関数 $f(x)$ を (1) 式の級数による波の足し合わせで表したとき，それぞれの波の係数は (5) 式で求められることを表しています。(1) 式の級数を，関数 $f(x)$ の**フーリエ級数展開**とよび，(5) 式で求められる係数を，周期 L/k の波の**フーリエ係数**とよびます。

付録：指数関数と三角関数，正負の周波数

本文の説明で，指数が虚数になっている指数関数が波を表すものとしてきました。しかし，本来波を表すのは三角関数のはずです。実は，これらは同じことを表しているのです。しかも，指数関数のほうが三角関数よりも計算が簡単です。この節では，三角関数と指数関数の関係を説明しておきます。

オイラーの式，すなわち

$$\exp(i\omega) = \cos\omega + i\sin\omega \tag{A1}$$

から[4]，三角関数と指数関数に

$$\cos\omega = \frac{\exp(i\omega)+\exp(-i\omega)}{2},\ \ \sin\omega = \frac{\exp(i\omega)-\exp(-i\omega)}{2i} \tag{A2}$$

という関係があることがわかります。(A1) 式から，実空間の 1 つの正弦波 $a_1\cos 2\pi\nu_1 x$ は，指数関数で表現すると，

$$a_1\cos 2\pi\nu_1 x = \frac{a_1}{2}\exp(i2\pi\nu_1 x) + \frac{a_1}{2}\exp(i2\pi(-\nu_1)x) \tag{A3}$$

となります。したがって，この関数のフーリエ係数は，ν_1 と $-\nu_1$ の正負 2 つの周波数に対応して，それぞれ $a_1/2$ となります。つまり，「ひとつのコサイン関数で表される波は，指数関数を用いるときは，正負の 2 つの周波数の組で表現される」ことがわかります。

ところで，周波数が同じで，波全体が左右にずれた波，すなわち位相がずれた波は，指数関数を使ったときはどのように表されるでしょうか。ここで，波 $a_1\cos(2\pi\nu_1 x$ に対して，θ だけ位相がずれた波 $a_1\cos(2\pi\nu_1 x+\theta)$ を考えて指数関数で表すと，

$$\begin{aligned} a_1\cos(2\pi\nu_1 x+\theta) &= \frac{a_1}{2}\exp(i(2\pi\nu_1 x+\theta)) + \frac{a_1}{2}\exp(-i(2\pi\nu_1 x+\theta)) \\ &= \frac{a_1}{2}\exp(i2\pi\nu_1 x)\exp(i\theta) + \frac{a_1}{2}\exp(i2\pi(-\nu_1)x)\exp(-i\theta) \end{aligned} \tag{A4}$$

となります。この場合，ν_1 と $-\nu_1$ の正負 2 つの周波数に対応するフーリエ係数は，それぞれ $\frac{a_1}{2}\exp(i\theta)$ および $\frac{a_1}{2}\exp(-i\theta)$ となります。(A4) 式の場合，これらの係数を複素数の振幅と位相で表すと，振幅は (A3) 式と同じで，ν_1 と $-\nu_1$ の正負 2 つの周波数に対して，係数 $a_1/2$ が現れます。一方，位相については，ν_1 と $-\nu_1$ の正負 2 つの周波数に対して，係数 θ と $-\theta$ が現れます。つまり，指数関数を用いると，波の位相 θ が，複素数の位相として現れます。

[4] これは定義ですが，なぜこうするとよいのかを理解するには，テイラー級数の知識が必要です。詳しくは，「基礎数学（解析)」で扱う内容と，私の講義「応用数学（解析)」の「複素関数論」を参照してください。

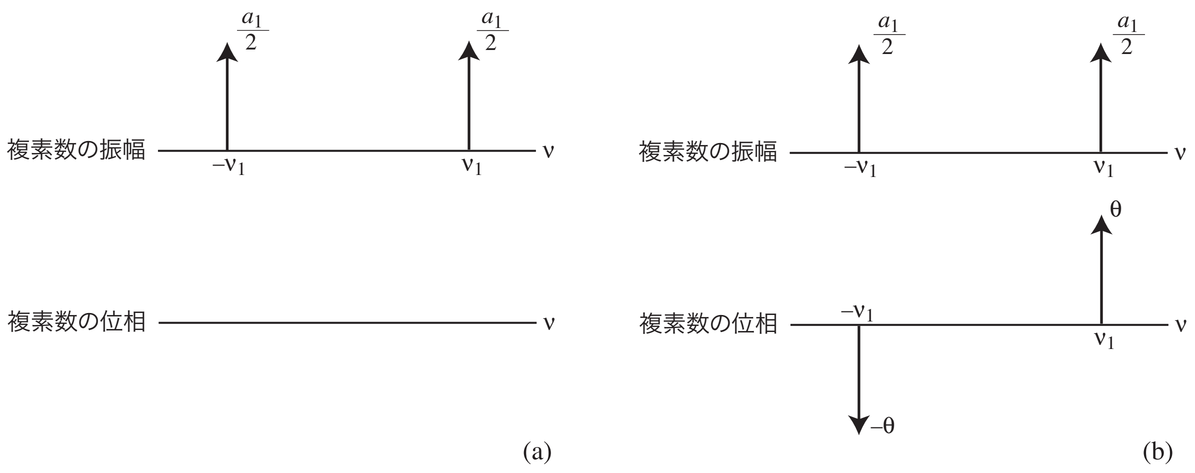

図 A1: 波の位相の周波数空間での表現．(a) $a_1 \cos 2\pi\nu_1 x$. (b) $a_1 \cos(2\pi\nu_1 x + \theta)$.

参考文献

貴家仁志，よくわかるディジタル画像処理，CQ 出版社
ISBN4-7898-3677-0J.W.Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill