2019年度秋学期　画像情報処理　第２回

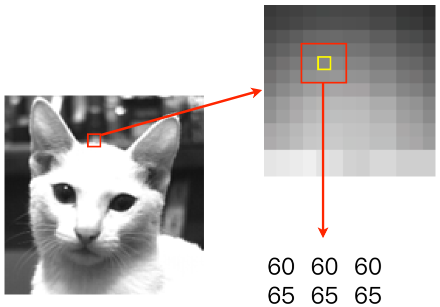
空間周波数とフーリエ級数

浅野　晃
関西大学総合情報学部

第１部のトピック

A. Asano, Kansai Univ.

標本化と量子化



60　60　60
65　65　65
70　70　70

画像は，離散的な点（画素, pixel）の集まりでできている
［標本化］

各画素は，明るさ（輝度）を表す整数である
［量子化］

A. Asano, Kansai Univ.

標本化と量子化

標本化（サンプリング）
・・・どのくらいの細かさで？
［空間周波数］

空間周波数を求めるのが
［フーリエ変換］

A. Asano, Kansai Univ.

光による画像の生成

波の性質・回折と干渉

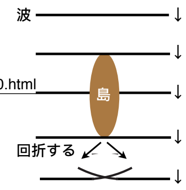
中国・銭塘江の「大海嘯」

（写真略）

http://www.nhk.or.jp/archives/nhk-archives/ past/2006/h060430.html

波の「干渉」
山どうし・谷どうしが
重なり合うと
強めあう

波の「回折」
島の裏側に
回り込む



回折格子と１次回折光

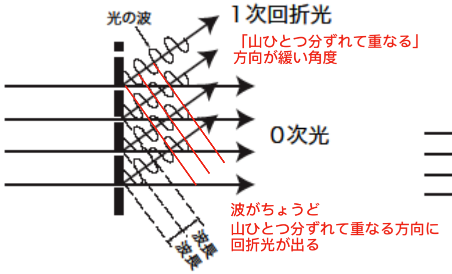
回折によって光が全方向に
飛び散る

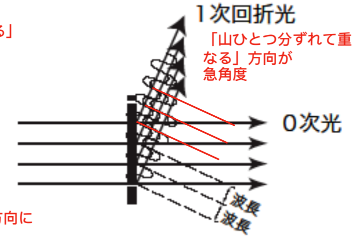
周期的に重なった方向の光だけが
強め合う

細かい格子ほど
大きな角度で回折光が出る

粗い回折格子

細かい回折格子



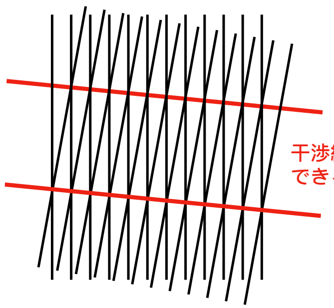


光の干渉

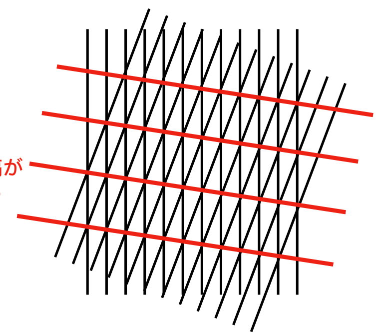
回折光と０次光が重なると再び縞ができる

細かい格子ほど大きな角度で回折光が出るから

光の波



干渉縞が
できる



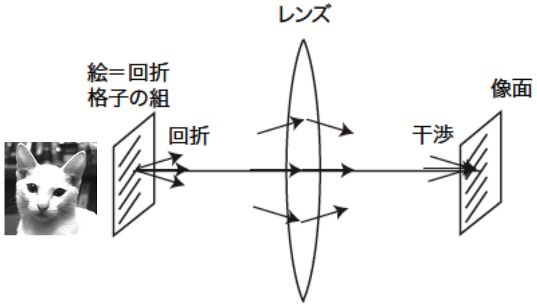
角度が小さいと
粗い縞

角度が大きいと
細かい縞

格子が再現される

画像の生成（結像）

画像は回折格子の重ね合わせであり，
それぞれの回折格子で回折された光が像面で干渉して，
画像が再現される

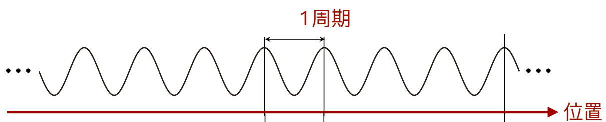


画像は回折格子，すなわち波の重ね合わせである
どんな波が重ね合わされているかを求める計算が［フーリエ変換］

空間周波数とフーリエ級数

波の周波数と波長

基本的な波
三角関数で表す

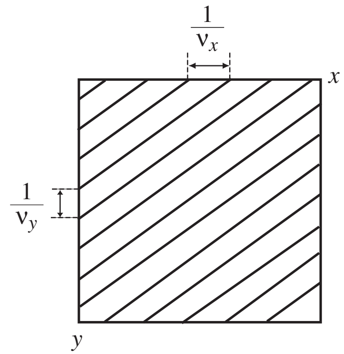


［周波数］
単位長さ（1mmとか）の間に
何周期の波が入っているか

［波長］
波が1周期進むのにかかる
長さはどれだけか

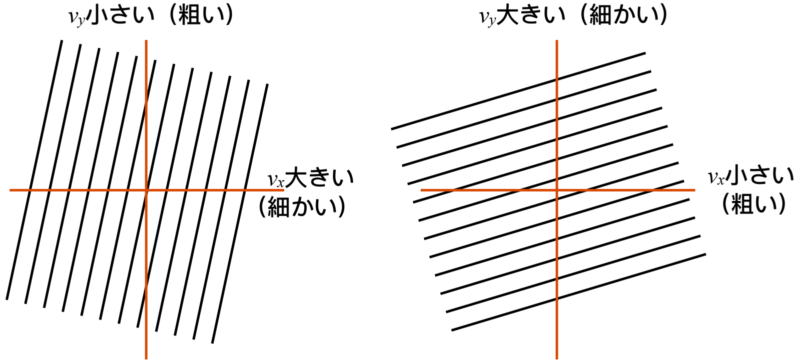
空間周波数

平面上の「明暗の波」の細かさを表す
単位長さの中で明暗が何回繰り返すか



x方向・y方向の２つの空間周波数の組で，ひとつの平面上の波が定まる

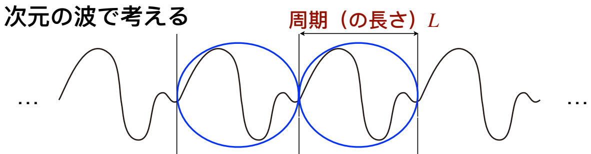
空間周波数



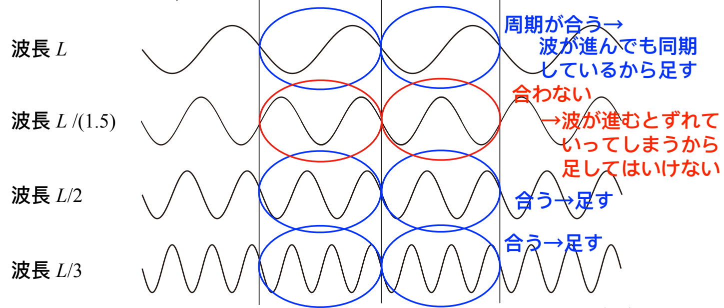
A. Asano, Kansai Univ.

周期関数を分解

ここからは１次元の波で考える



もし，この周期関数が，三角関数の和で書けるとしたら？足されるのは

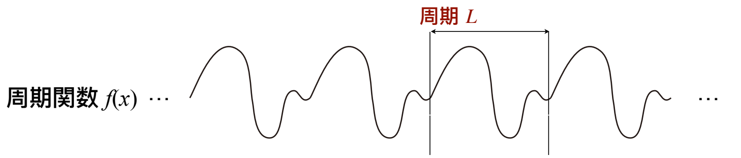


… 足されるのは波長 L / n（nは整数）
のものに限る。

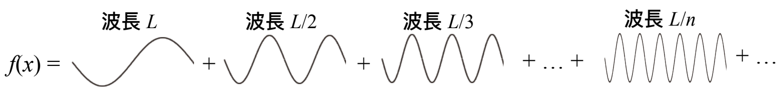
無限個の波の足し合わせだが，
足し算（級数）で書ける。

A. Asano, Kansai Univ.

「無限個だが，足し算で書ける」



周期関数 $f(x)$が，三角関数の和で書けるとしたら，足されるのは



… 足されるのは波長 L / n（nは整数）のものに限るから，
無限個の三角関数を足すのだけれども
このように「項」を並べることができる

「級数」という

A. Asano, Kansai Univ.

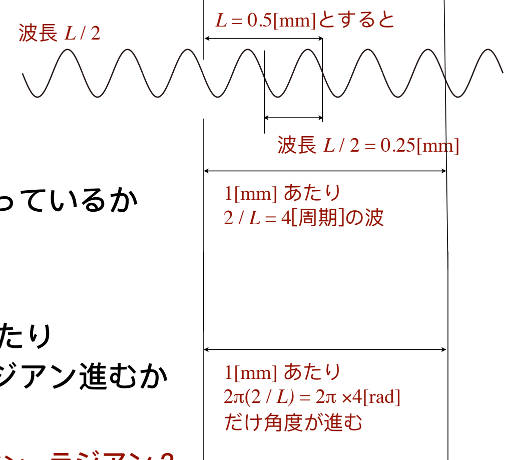
波の進み方を「角度」で表す

★三角関数を使うときは，角度を単位にしなければいけない

L / n　波長

n / L　単位長さあたり
何周期ぶんの波が入っているか
［周波数］

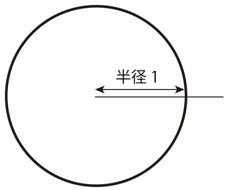
$2\pi(n / L)$　単位長さあたり
位相（角度）が何ラジアン進むか
［角周波数］



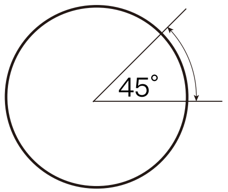
1周=360度=2πラジアン　ラジアン？

A. Asano, Kansai Univ.

ラジアン（弧度法）



半径1の円の
円周の長さは 2π



この角度を，
対応する円周の長さで表す

45° ＝1周の1/8 だから，
ラジアンであらわすと
$2\pi \times (1/8) = \pi / 4$ (rad)

1周=360度=2πラジアン

A. Asano, Kansai Univ.

周期関数＝三角関数の級数

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos(2\pi \frac{1}{L} x) + a_2 \cos(2\pi \frac{2}{L} x) + \ldots + a_n \cos(2\pi \frac{n}{L} x) + \ldots$$

波長 L　　波長 $L/2$　　波長 L/n

なんですが…

三角関数は計算が面倒。

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\{\cos(x+y) + \cos(x-y)\}$$

指数関数なら計算が簡単

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

かけ算＝指数の足し算

A. Asano, Kansai Univ.

三角関数と指数関数

$i^2 = -1$ 虚数単位

オイラーの式　$\exp(i\omega) = \cos\omega + i \sin\omega$

$$\cos\omega = \frac{\exp(i\omega) + \exp(-i\omega)}{2}, \quad \sin\omega = \frac{\exp(i\omega) - \exp(-i\omega)}{2i}$$

$\exp(x) = e^x$

$(e^x)' = e^x$ 微分しても変わらない

$e = 2.71828...$

ひとつの三角関数＝波は，
正負の周波数をもつ指数関数の組で表される

「周波数がマイナス」というのはヘンだが，
プラスの周波数とマイナスの周波数のペアでひとつの波になる

A. Asano, Kansai Univ.

周期関数を指数関数の和で

波長 L / n の波は　$\exp(i2\pi \frac{n}{L} x)$ と $\exp(-i2\pi \frac{n}{L} x)$　の組

周期 L の周期関数 $f(x)$ は，波長 L / n の波を足し合わせて

プラスもマイナスも∞

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L} x\right)$$

と書ける　はず。

A. Asano, Kansai Univ.

書ける，のはいいが

周期 L の周期関数 $f(x)$ は，

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L} x\right)$$

と書ける　はず。

この係数はどうやって
求めるの？

A. Asano, Kansai Univ.

ある波長の波を切り出す

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L} x\right)$$

から，波長 L / nの波に対応する指数関数だけを切り出したい

波長 L / nの指数関数　$\exp\left(i2\pi \frac{n}{L} x\right)$

一方，$f(x)$ を構成する指数関数のいずれか（波長 L / m）は

$$\exp\left(i2\pi \frac{m}{L} x\right)$$

A. Asano, Kansai Univ.

ある波長の波を切り出す

波長 L / m の指数関数と L / n の指数関数について
こういう計算をしてみる

$f(x)$ の 1 周期分だけ積分（積分については次回）

複素共役

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \underbrace{\exp\left(i2\pi \frac{m}{L} x\right)}_{\text{波長 } L / m} \underbrace{\exp\left(-i2\pi \frac{n}{L} x\right)}_{\text{波長 } L / n} dx$$

この答は　mとn が異なるとき（別の波長）　0
　　　　　mとn が等しいとき（同じ波長）　L

指数関数のグループはこの性質をもつ　直交関数系

A. Asano, Kansai Univ.

フーリエ級数展開とフーリエ係数

ある整数

そこで　$\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \exp\left(-i2\pi \frac{k}{L} x\right) dx$　を計算してみる

$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L} x\right)$　なので

$$\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L} x\right) \exp\left(-i2\pi \frac{k}{L} x\right) dx$$

級数の各項を積分すると，$n = k$ の項だけは積分すると　L
他の項は積分すると　0

つまりこの積分の答は　$\frac{1}{L} \cdot L a_k = a_k$　係数が求まった

A. Asano, Kansai Univ.

まとめ・フーリエ級数展開とフーリエ係数

周期 L の周期関数 $f(x)$ は,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi\frac{n}{L}x\right)$$

という波の足し合わせ（級数）で表される
（フーリエ級数展開）

係数 a_n（フーリエ係数）は

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)\exp\left(-i2\pi\frac{n}{L}x\right)dx$$

という積分で表される