

2019年度秋学期 画像情報処理 第3回  
フーリエ変換とサンプリング定理

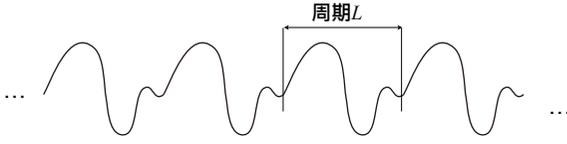
浅野 晃  
関西大学総合情報学部



フーリエ変換🤔

周期関数は、フーリエ級数で表される

周期  $L$  の  
周期関  
数  $f(x)$



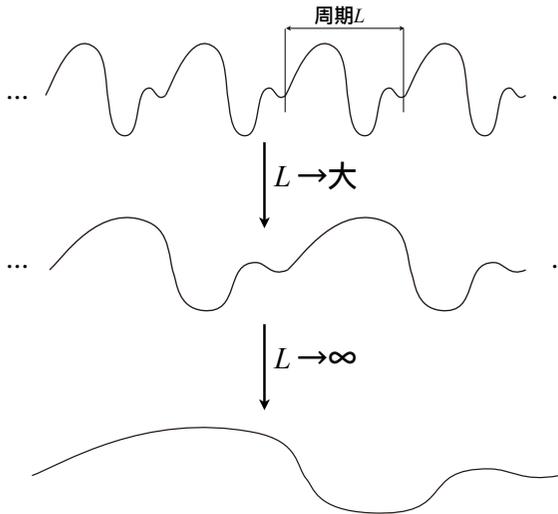
$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L}x\right)$$

という、波の足し合わせ（級数）で表される  
(フーリエ級数展開)

係数  $a_k$  (フーリエ係数) は

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \exp\left(-i2\pi \frac{k}{L}x\right) dx$$

周期関数でない場合は？



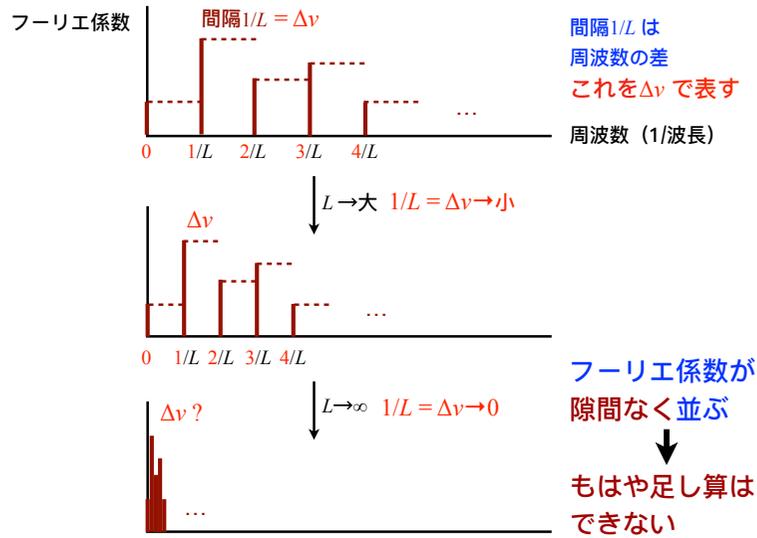
周期  $L$

$L \rightarrow \text{大}$

$L \rightarrow \infty$

非周期関数は  
周期が無限大と  
考える

# 周期 L が大きくなっていくと



# 級数から積分へ

周期 L の周期関数  $f(x)$  は,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L}x\right)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \exp\left(-i2\pi \frac{n}{L}x\right) dx$$

$1/L = \Delta\nu$  と書き換える

紛らわしいので別の文字にしてください

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \Delta\nu \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(\tau) \exp(-i2\pi n \Delta\nu \tau) d\tau \right) \exp(i2\pi n \Delta\nu x)$$

# 級数から積分へ

$n\Delta\nu$  はある周波数を表すので,  $\nu$  であらわす  
 $L \rightarrow \infty$  のとき  $\Delta\nu \rightarrow 0$

このとき

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \Delta\nu \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(\tau) \exp(-i2\pi n \Delta\nu \tau) d\tau \right) \exp(i2\pi n \Delta\nu x)$$

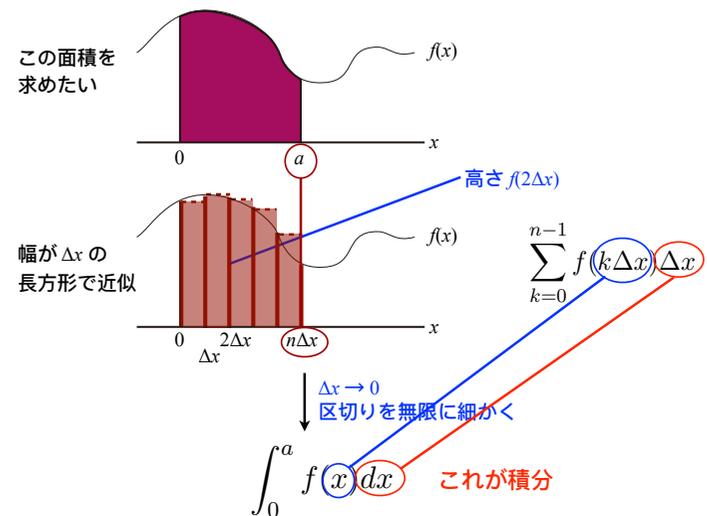
のなかの総和 ( $\Sigma$ ) が,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-i2\pi \nu \tau) d\tau \right) \exp(i2\pi \nu x) d\nu$$

という積分になる

???

# 積分とは？



## 級数から積分へ

$n\Delta\nu$  はある周波数を表すので、 $\nu$  であらわす  
 $L \rightarrow \infty$  のとき  $\Delta\nu \rightarrow 0$

このとき

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \Delta\nu \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(\tau) \exp(-i2\pi n\Delta\nu\tau) d\tau \right) \exp(i2\pi n\Delta\nu x)$$

のなかの総和 ( $\Sigma$ ) が,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-i2\pi\nu\tau) d\tau \right) \exp(i2\pi\nu x) d\nu$$

という積分になる !!!

## フーリエ変換

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-i2\pi\nu\tau) d\tau \right) \exp(i2\pi\nu x) d\nu \quad \text{を}$$

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i2\pi\nu x) dx$$

と分けて書く

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) \exp(i2\pi\nu x) d\nu$$

フーリエ変換対 という

## まとめ・フーリエ変換

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i2\pi\nu x) dx \quad \text{フーリエ変換}$$

関数  $f(x)$  に、どのような周波数の波がどれだけ含まれているか、「波を切り出す」

フーリエ係数の並びだったのが、周波数の間隔がどんどん小さくなって、ついにはひとつの関数  $F(\nu)$  になる

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) \exp(i2\pi\nu x) d\nu \quad \text{逆フーリエ変換}$$

周波数  $\nu$  の波  $\exp(i2\pi\nu x)$  に、対応するフーリエ係数  $F(\nu)$  をかけたものを合計 (積分) すると  $f(x)$  に戻る

## 2次元の場合は

$$1 \text{次元のフーリエ変換} \quad F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i2\pi\nu x) dx$$

2次元のフーリエ変換

$$F(\nu_x, \nu_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp\{-i2\pi(\nu_x x + \nu_y y)\} dx dy$$

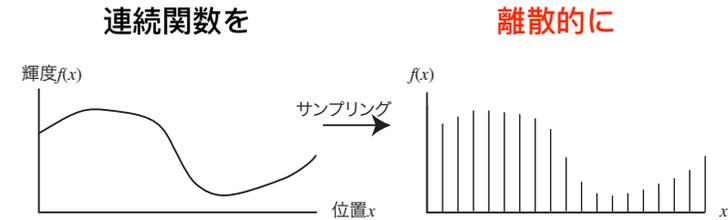
この式は、 $x, y$  それぞれに1次元のフーリエ変換をしたことになっている

$$F(\nu_x, \nu_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-i2\pi\nu_x x) dx \right] \exp(-i2\pi\nu_y y) dy$$

注:  $\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$

# サンプリングとサンプリング定理 🤔

# サンプリングとサンプリング定理



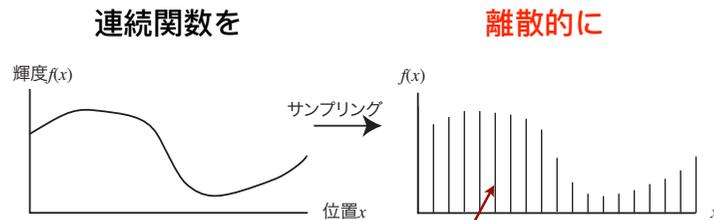
## サンプリング定理

ある程度細かい間隔でサンプリングすれば、  
もとの連続関数に戻せる

どのくらい細くしなければならぬかは、  
もとの関数に含まれる **最高の周波数** による

「細かい」関数は  
細かくサンプリング

# サンプリングとは



この1本1本は何？

ディラックのデルタ関数  $\delta(x)$

# ディラックのデルタ関数 $\delta(x)$

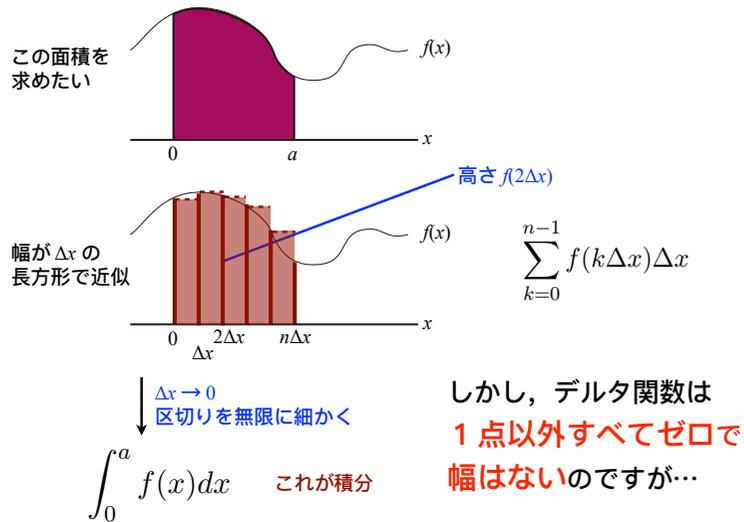
$$\delta(x) = 0 \quad (x \neq 0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

$x=0$  の1点以外  
すべてゼロ

$x=0$  をはさんで  
積分すると1

何ですかこれ?? 🤔

# 積分って何でしたっけ？

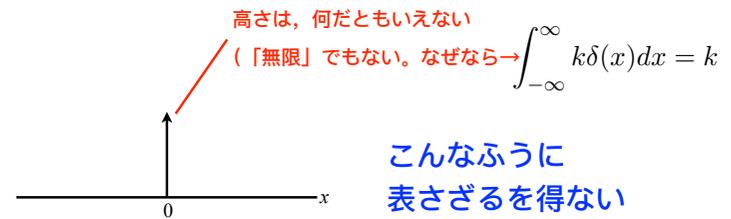


# ディラックのデルタ関数 $\delta(x)$

$$\delta(x) = 0 \quad (x \neq 0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

$x=0$  の1点以外  
すべてゼロ

$x=0$  をはさんで  
積分すると1

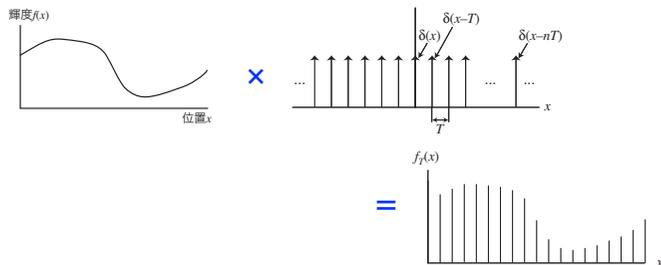


# くし形関数 $\text{comb}_T(x)$ とサンプリング

くし形関数

$$\text{comb}_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nT)$$

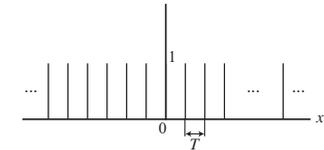
サンプリング  $f_T(x) = f(x)\text{comb}_T(x)$



# こんなややこしい関数でなければいけないの？

ディラックのデルタ関数ではなく、  
「縦棒」を並べて、くし形関数にしてはだめ？

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

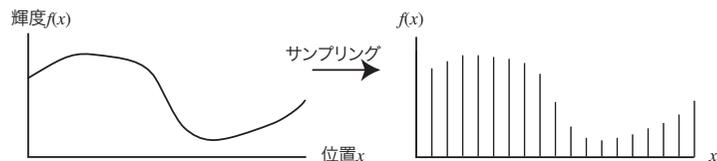


だめです。

こっちの関数は、幅がなくて高さ1だから、  
積分したらゼロ→画像の輝度の合計がゼロのはずはない

ディラックのデルタ関数は、幅がないのに積分したら1  
というヘンな関数 (超関数)

## サンプリングされたら、周波数の範囲は？



周波数がある範囲に入るとき

サンプリング後はどうなる？

サンプリングされた関数である  $f_T(x)$  のフーリエ変換を求める

$$f_T(x) = f(x) \text{comb}_T(x)$$

2つの関数のかけ算のフーリエ変換は？

## かけ算のフーリエ変換

こうなります

$$FT[f(x)g(x)](\nu) = FT[f(x)](\nu) * FT[g(x)](\nu)$$

かけ算のフーリエ変換    フーリエ変換と    フーリエ変換の

???

\*は、コンヴォリューション（畳み込み）といいます

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(t-y)dy$$

その意味は、少し後で…

## サンプリングされた関数のフーリエ変換

つまり

$$FT[f_T(x)](\nu) = FT[f(x)](\nu) * FT[\text{comb}_T(x)](\nu)$$

サンプリングされた関数のフーリエ変換    もとの関数のフーリエ変換と    くし形関数のフーリエ変換の  
コンヴォリューション

くし形関数のフーリエ変換は

$$FT[\text{comb}_T(x)](\nu) = \frac{1}{T} \text{comb}_{1/T}(\nu)$$

くし形関数のフーリエ変換はくし形関数、ただし間隔が逆数

## くし形関数とのコンヴォリューション

つまり

$$FT[f_T(x)](\nu) = \frac{1}{T} \{ FT[f(x)](\nu) * \text{comb}_{1/T}(\nu) \}$$

サンプリングされた関数のフーリエ変換    もとの関数のフーリエ変換と    くし形関数のフーリエ変換の  
コンヴォリューション

「くし形関数とのコンヴォリューション」とは？

「デルタ関数とのコンヴォリューション」を並べたもの

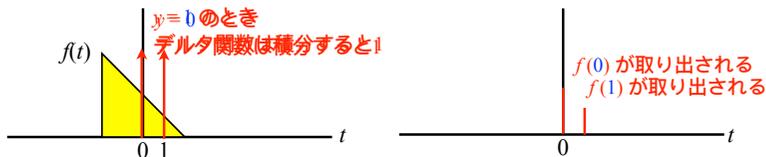
# デルタ関数とのコンヴォリューション

$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta(t-y)dy$$

デルタ関数は  
ここが0のとき以外はゼロ  
→積分してもゼロ

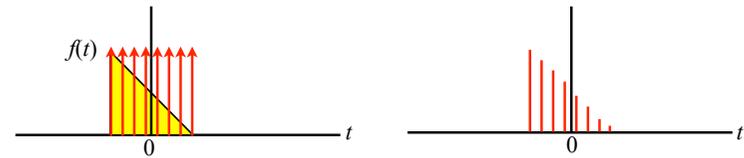
$t=0$ のとき  $f(t) * \delta(t)|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta(t-y)dy$

$y=0$ のとき以外は  
積分に無関係



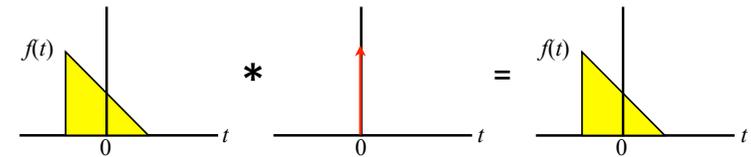
# デルタ関数とのコンヴォリューション

$t=\alpha$ のとき,  $f(\alpha)$ が取り出される

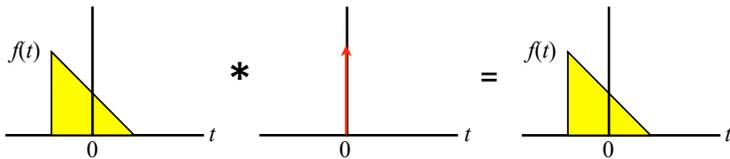


つまり

$f(x)$  とデルタ関数のコンヴォリューションは,  $f(x)$  自身



# くし形関数とのコンヴォリューション

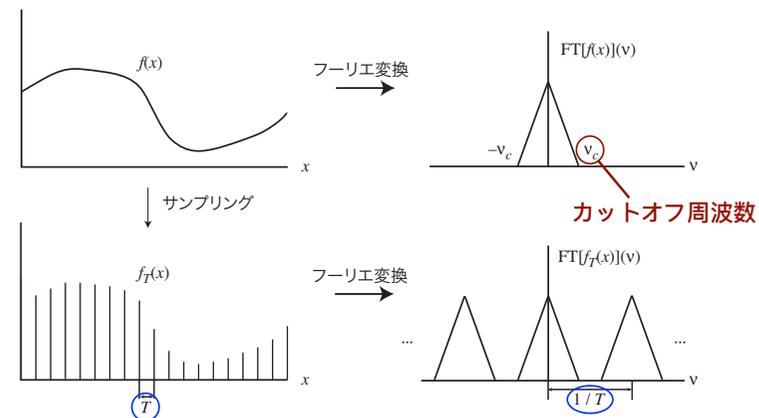


くし形関数は, デルタ関数が等間隔に並んでいる

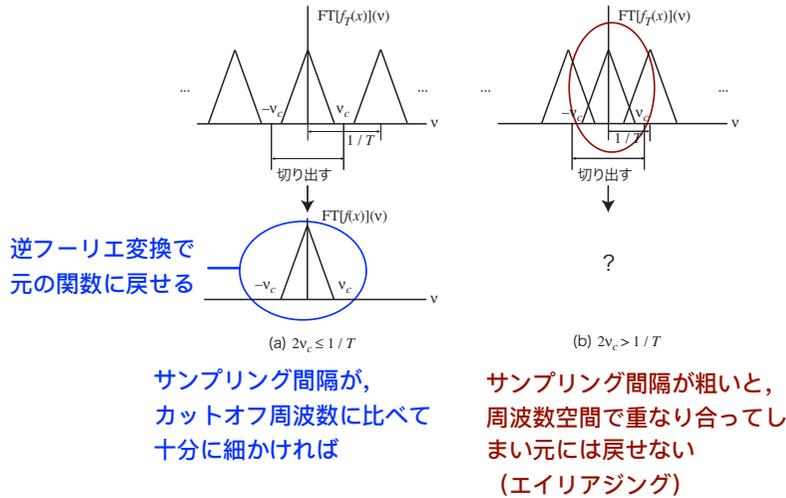
くし形関数とのコンヴォリューションは, 元の関数の  
「コピー」が等間隔に並んだものになる



# まとめると・サンプリングとフーリエ変換



## 周波数空間での間隔



## まとめ・サンプリング定理

ある関数（画像でも、音声でも）を、そのもつ最大の周波数の2倍以上の細かさでサンプリングしておけば、

サンプリングされたもの（デジタル画像、デジタル音声）から元の関数を再現できる

例) CDはサンプリング周波数が44.1kHz  
 →22.05kHzまでの音声記録できる  
 (録音時に、それ以上の周波数の成分が入らないようにしなければならない)