2019年度秋学期　画像情報処理　第６回

「行列」に慣れていない人のために

（第２部「画像情報圧縮」の準備）

浅野　晃
関西大学総合情報学部

ベクトルと行列の考え方

たくさんの数の組を，ひとまとめに計算する

ひとつの組がいくつの数でできていても，
同じように計算できるようにする

組の中身を意識せずにすむことによって，
さらに複雑な計算を考えることができる
（現代のプログラミングも同じ考えかた）

ベクトルの計算

$$z = a_1 x_1 + a_2 x_2$$ この計算を

$$z = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$ と書く

行ベクトル　列ベクトル

ベクトルの計算が２つ

$$z_{(1)} = \boxed{\begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}$$

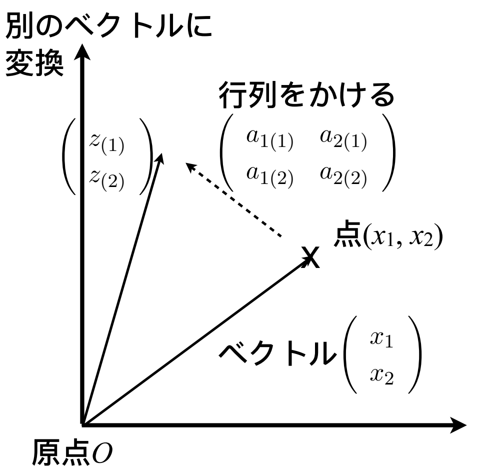
$$z_{(2)} = \boxed{\begin{pmatrix} a_{1(2)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}$$

この計算を
まとめて

$$\begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} \\ a_{1(2)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

行列　　と書く

図形的意味



定数倍の計算

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \boxed{\lambda\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}}$$

の意味

行列と行列の計算

$$\boxed{\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix}} = \lambda_{(1)}\begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix}} = \lambda_{(2)}\begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix}$$

この計算を
まとめて

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix}$$

行列とベクトルの計算が２つ

$\lambda_{(1)}$に関する計算

$$= \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} \end{pmatrix}$$

要素がp個の場合

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

は,

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$$

要素がp個の場合

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} \end{pmatrix}$$

は,

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & & & 0 \\ & \lambda_{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{(p)} \end{pmatrix}$$

なんのために？？？

行列を 1 文字で表す

$$\underbrace{\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{pmatrix}}_{S}\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix}}_{P}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & & & 0 \\ & \lambda_{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{(p)} \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$SP = P\Lambda$$

複雑な計算を，あたかも数の計算のように単純に考える

ただし

行列の積は，交換ができない

ABとBAが等しいとは限らない

転置行列・対称行列

行列A $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

転置行列

${}^tA, A^t, A^T, A'$

ある行列とその転置行列が同じとき，

対称行列という

逆行列

行列には割り算はない

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

単位行列
（かけ算をしても
何もおこらない）

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるA^{-1}を，Aの逆行列という

数の場合は

$$a \times \frac{1}{a}\,(\text{逆元}) = 1\ (\text{単位元})$$

行列の場合は

$$AA^{-1}\,(\text{逆行列}) = I\ (\text{単位行列})$$

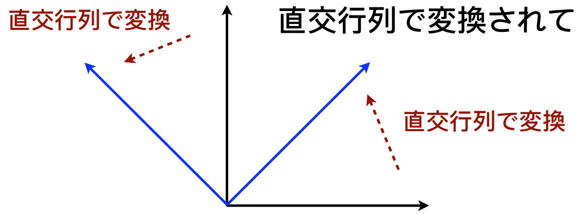
直交行列

逆行列が転置行列と同じであるような行列を
直交行列という

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} b \\ d \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

直交行列の列ベクトルどうしは
直交している

直交した２つのベクトルは，
直交行列で変換されても直交している



第２部の本題へ

第２部は画像データ圧縮

画像を，各画像で大きく異なる部分と
どの画像でもあまりかわらない部分にわける

どの画像でもあまり変わらない部分
なんて，ある？

直交変換すると，
「大まかな部分」「細かい部分」
が別になるように組み替えられる

どの画像でもあまりかわらない部分は，ごまかす

フーリエ変換も，行列で表すと直交変換の一種