2019年度秋学期　画像情報処理　第７回

主成分分析とKarhunen-Loève変換

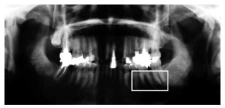
浅野　晃
関西大学総合情報学部

画像情報圧縮

画像情報圧縮の必要性

この画像では，１画素の明るさを0〜255の整数で表す

１画素に，２進数８桁 = ８ビット = １バイト必要
５００万画素のデジカメの画像は，約５メガバイト必要



こういう画像は，１画素 = １６ビットで，
２倍の１０メガバイト必要なこともある

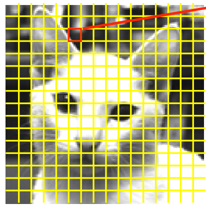
カラー画像ならば，３倍の１５メガバイト必要

動画ならば，(1/30)秒でこれだけのデータ量！

JPEG方式による画像圧縮

画像を波の重ね合わせで表わし，
一部を省略して，データ量を減らす

８×８ピクセルずつの
セルに分解



ひとつのセルを，
これらの波の重ね合わせで表す

（著作権の問題により画像をはずしました）

細かい部分は，どの画像でも大してか
わらないから，省略しても気づかない

省略すると，データ量が減る

画像情報圧縮の例

データ量：80KB

データ量：16KB

（８ｘ８ピクセルの
セルが見える）

A. Asano, Kansai Univ.

ところで，本当に「波」でいいんですか？

まあ，結局「波」でいいんですけどね…

A. Asano, Kansai Univ.

もっと根本的な原理から説明します。

「主成分分析」と「直交変換」

A. Asano, Kansai Univ.

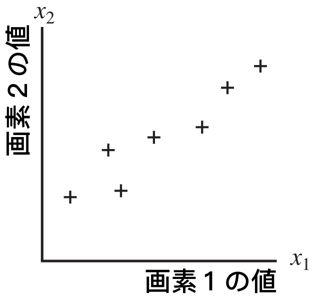
主成分分析

A. Asano, Kansai Univ.

重要な成分と，そうでない成分

しばらく，画素が２つしかない画像を考える

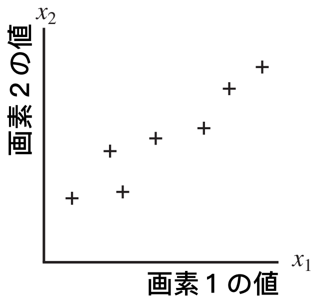
たくさんの２画素画像を考える



ひとつの２画素画像は，
この図の１つの点で
表される

（散布図という）

どちらかの画素値を省略できるか？

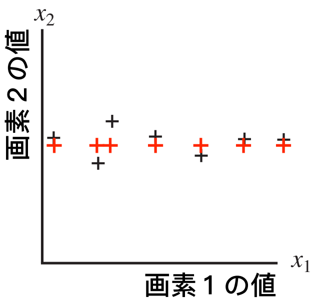


たくさんの２画素画像が
こんなふうに散らばって
（分布して）いたら

各画像の違いを表現する
のには，どちらの画素も
省略することはできない

どちらの画素値の分散も大きい

こんな分布なら



画素２の値は，どの画像
でもあまり変わりない
（分散が小さい）

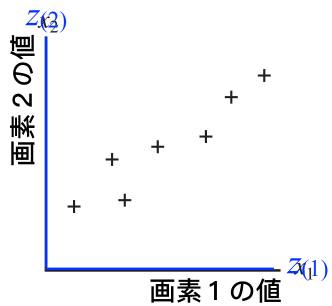
各画像の違いを表現するの
に，画素２はそれほど必要な
い

画素２の値は，それらの平均に置きかえてし
まってもそれほど変わらない

画素２の値はいちいち記録しなくてもいいか
ら，データ量が半分に減る

そういう都合のいい分布に変換できないの？

散布図上である方向に広がっているなら
（x_1, x_2に相関があるなら）できます。こうすればいい



x_1, x_2を回転して，新たに
$z_{(1)}$, $z_{(2)}$ とすればよい

$z_{(1)}$ の分散がもっとも大き
くなるように回転する

このとき $z_{(1)}$ と$z_{(2)}$ の相関
がなくなる

これをするのが主成分分析

主成分分析

x_1, x_2から次の式で zを求めるものとし，
zの分散$V(z)$が最大になるa_1, a_2を求める

$$z = a_1 x_1 + a_2 x_2$$

$V(z)$を求めるために，次の量を用いる

x_{1i}, x_{2i}　n枚中のi番目の画像の，x_1, x_2の値

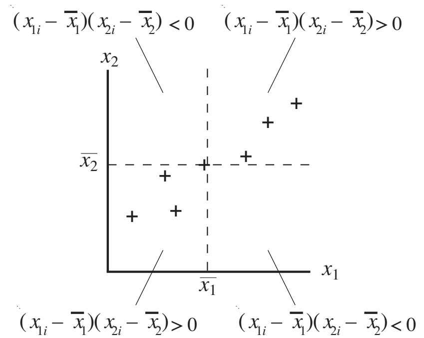
$\bar{x_1}, \bar{x_2},$　x_1, x_2の全画像にわたる平均

s_{11}, s_{22}:　x_1, x_2の分散

共分散とは

$$s_{12} = s_{21} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{1i} - \overline{x_1})(x_{2i} - \overline{x_2})$$

x_1, x_2の共分散



共分散の正負
＝相関の正負

(共分散を
x_1, x_2の標準偏差で
割ったものが
相関係数)

さて，zの分散V(z)は

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \overline{z})^2 \\ &= a_1^2 s_{11} + 2a_1 a_2 s_{12} + a_2^2 s_{22} \end{aligned} \quad (3)式$$

$V(z)$が最大になるa_1, a_2を求める

xからzへの変換は「回転」
(伸び縮みしない) → $a_1^2 + a_2^2 = 1$

固有値問題

定数λを使って

$$\begin{aligned} a_1 s_{11} + a_2 s_{12} &= a_1 \lambda \\ a_2 s_{22} + a_1 s_{12} &= a_2 \lambda \end{aligned}$$

が得られる（付録1）

行列で書くと

$$\underbrace{\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{pmatrix}}_{\text{分散共分散行列}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}_{\text{固有ベクトル}} = \underbrace{\lambda}_{\text{固有値}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

固有値・固有ベクトルを求める問題を
「固有値問題」という（解き方は略）

第１主成分

固有ベクトル $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ 固有値 λ が２組得られて，しかも

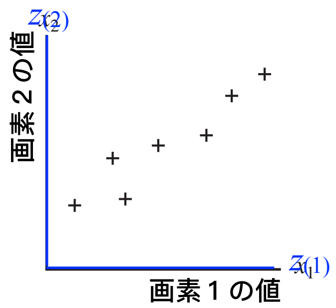
$V(z) = \lambda$ となる（付録2）

大きい方の λ($\lambda_{(1)}$とする）に対応する
固有ベクトル $\begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix}$ を使って
求めた z （$z_{(1)}$ とする）が，求めたかった z

第１主成分という

主成分分析と直交変換

このときz(1)とz(2)は無相関



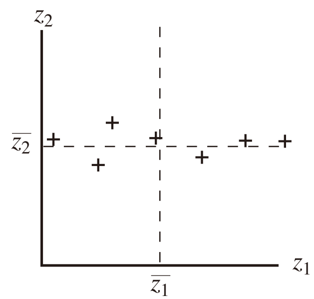
x_1, x_2を回転して，新たに $z_{(1)}, z_{(2)}$ とする

$z_{(1)}$ の分散がもっとも大きくなるように回転する

$z_{(1)}, z_{(2)}$ は無相関。
なぜなら

相関がないときは

相関がない→$(z_{1i} - \overline{z_1})(z_{2i} - \overline{z_2})$ の正負がつりあう



共分散＝０

先ほど求めた
$z_{(1)}, z_{(2)}$ はこうなっている
→本当？

主成分分析と分散共分散行列

固有値のうち，大きい方を $\lambda_{(1)}$，小さい方を $\lambda_{(2)}$

対応する固有ベクトル $\begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix}$

これらは

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix} = \lambda_{(1)} \begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix} = \lambda_{(2)} \begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix}$$ をみたす

分散共分散行列の対角化

まとめると

$$\underbrace{\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix}}_{P}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

つまり $SP = P\Lambda$

すなわち $\Lambda = P^{-1}SP$, $S = P\Lambda P^{-1}$

（分散共分散行列の）対角化という

対称行列の対角化

分散共分散行列 S は
対称行列 $\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$ $s_{12} = s_{21}$
共分散

対称行列の固有ベクトルは直交する（詳細略）
Pは直交行列 $\begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix}$

直交行列の逆行列は転置行列（逆回転）

すなわち $S = P\Lambda P'$

対角化の意味

$$S = P\Lambda P'$$

分散
共分散行列は

P'で変換し
そこでは分散共分散行列が Λ で
P で戻る

「この世」「あの世」

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} \end{pmatrix}$$ あの世では
共分散が０
→相関がない

P′で変換された「あの世」と

$$z_{(1)} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
$$z_{(2)} = \begin{pmatrix} a_{1(2)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
だから

これが P'

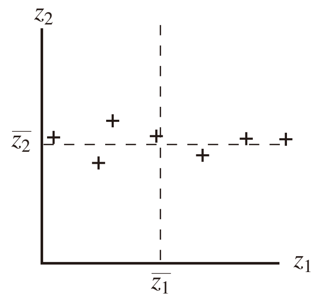
$$\begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} \\ a_{1(2)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

直交行列で変換するから
直交変換という

つまり，x から z に変換すると，
$z_{(1)}$ と $z_{(2)}$ の共分散が０
→相関がない

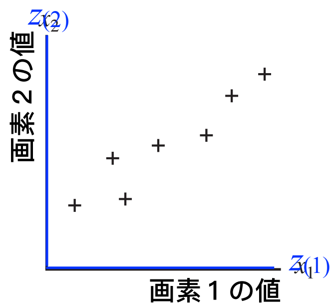
相関がないときは

相関がない→$(z_{1i} - \bar{z}_1)(z_{2i} - \bar{z}_2)$ の正負がつりあう



共分散＝０

たしかにz(1)とz(2)は無相関



x_1, x_2を回転して，新たに
$z_{(1)}, z_{(2)}$ とする

$z_{(1)}$ の分散がもっとも大きくなるように回転する

たしかに
$z_{(1)}, z_{(2)}$ は無相関

画素がp個あっても同じ

xからzへの，P'による直交変換

$$\begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \\ \vdots \\ z_{(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} & \cdots & a_{p(1)} \\ a_{1(2)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{p(2)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{1(p)} & a_{2(p)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = P' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

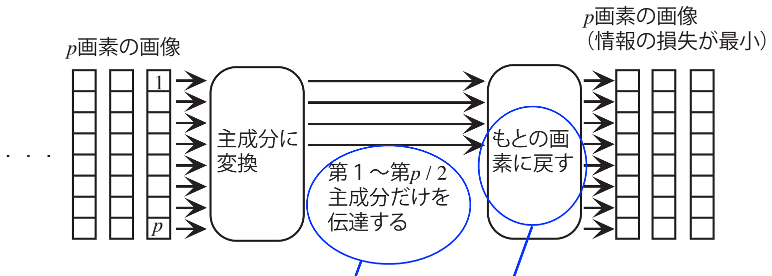
Pは固有値問題の解　分散共分散行列S

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$$

$$S \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & & & 0 \\ & \lambda_{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{(p)} \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

Karhunen-Loève変換（KL変換）

画像を主成分に変換してから伝送する



データ量が半分でも
情報の損失は最小

もどすときは,

A. Asano, Kansai Univ.

Karhunen-Loève変換（KL変換）

もどすときは

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \simeq (P')^{-1} \begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \\ \vdots \\ z_{(p/2)} \\ \overline{z_{(p/2+1)}} \\ \vdots \\ \overline{z_{(p)}} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \\ \vdots \\ z_{(p/2)} \\ \overline{z_{(p/2+1)}} \\ \vdots \\ \overline{z_{(p)}} \end{pmatrix}$$

伝送されて来なかった主成分は,
平均に置き換えておく

A. Asano, Kansai Univ.

KL変換の大問題

主成分を求めるには,
分散共分散行列が必要

分散共分散行列を求めるには,
「いまから取り扱うすべての画像」が
事前にわかっていないといけない

そんなことは不可能。

A. Asano, Kansai Univ.

続きは

分散共分散行列がわからないから,
どういう直交変換をしたらいいかもわからない

経験的にうまくいく直交変換を行う

画像をベクトルではなく，２次元のまま行列で表して
「行列の直交変換」を考え,
直交変換のようすが目に見えるようにする。

適切な直交変換を選ぶ
（実は結局フーリエ変換とその変形）

A. Asano, Kansai Univ.