2019年度秋学期 画像情報処理 第11回

Radon変換と投影定理

浅野 晃
関西大学総合情報学部

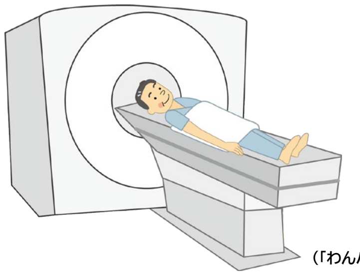
A. Asano, Kansai Univ.

CTスキャナとは🤔

A. Asano, Kansai Univ.

CTスキャナとは

CT(computed tomography) ＝ 計算断層撮影法

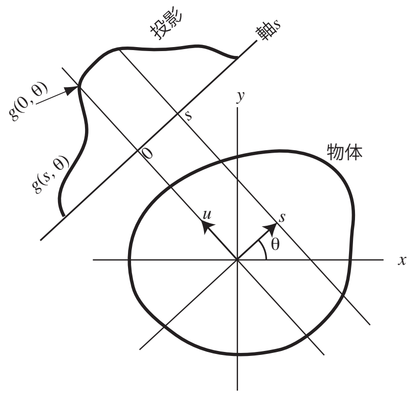


(「わんパグ」http://kids.wanpug.com/illust234.html)

体の周囲からX線撮影を行い，そのデータから
断面像を計算で求める

A. Asano, Kansai Univ.

CTを実現するには

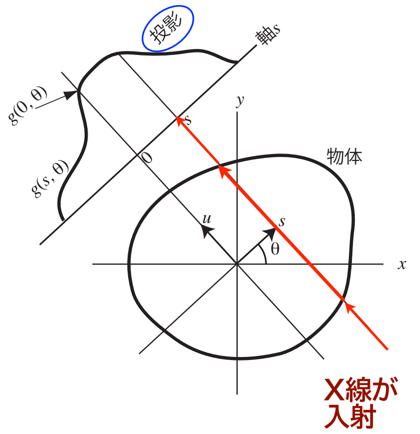


ある方向からX線を照射し，
その方向での吸収率(投影)を
調べる

すべての方向からの投影が
わかれば，元の物体における
吸収率分布がわかる

A. Asano, Kansai Univ.

投影とは

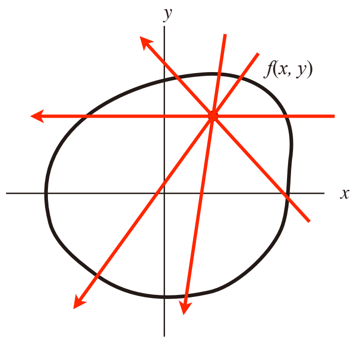


X線がある直線に沿って
物体を通過するとき，
直線上の各点で吸収される

通過したX線の量は，
入射した量に吸収率の積分
（線積分）をかけたものに
なっている

投影＝吸収率の線積分
直線上の吸収率の合計で
あって，どの点で吸収され
たかはわからない

Radonの示した定理



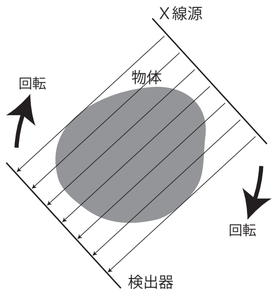
2次元関数の任意の点で
の値は

その点を通るすべての投影
（線積分）がわかれば求めら
れる

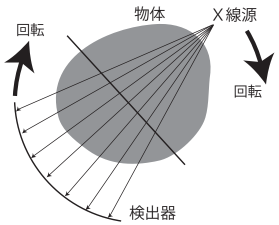
どうやって求めるかは，
あとで説明します。

各方向からの投影のしかた

理論上はこんなふうに考える



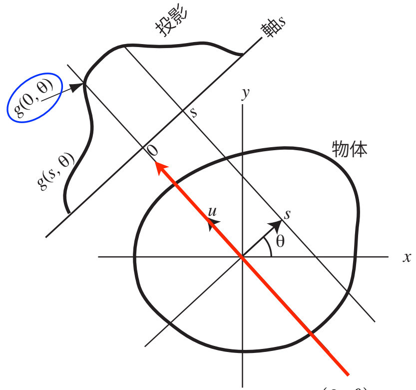
実際はこのようにX線を当てる



物体の1点について考えれば，
投影する順番が異なるだけで，
各方向の投影が得られるのは同じ

Radon変換

投影を2次元の積分で表す



この線上では

$$\frac{y}{x} = \tan(\theta + \frac{\pi}{2}) = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta}$$

つまり $x\cos\theta + y\sin\theta = 0$

この線上だけを積分する

→この式を満たす点だけを
積分する

$$g(0,\theta) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(x\cos\theta + y\sin\theta)dxdy$$

デルタ関数で表せる

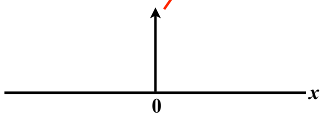
ディラックのデルタ関数$\delta(x)$

$$\delta(x) = 0 \ \ (x \neq 0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

$x = 0$ の1点以外
すべてゼロ

$x = 0$ をはさんで
積分すると1

高さは，何だともいえない
（「無限」でもない。なぜなら→ $\int_{-\infty}^{\infty} k\delta(x)dx = k$

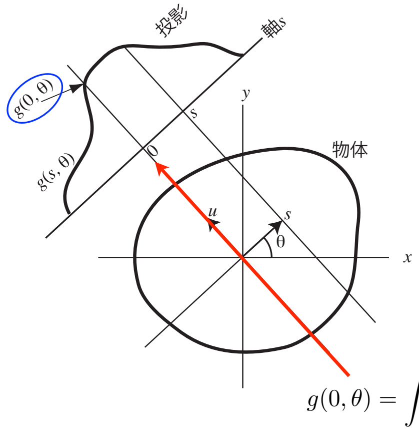


こんなふうに
表さざるを得ない

A. Asano, Kansai Univ.

Radon変換

投影を2次元の積分で表す



この線上では

$$\frac{y}{x} = \tan(\theta + \frac{\pi}{2}) = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta}$$

つまり $x\cos\theta + y\sin\theta = 0$

この線上だけを積分する

→この式を満たす点だけを
積分する

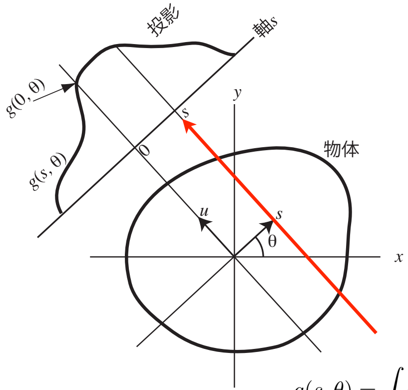
$$g(0,\theta) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(x\cos\theta + y\sin\theta)dxdy$$

デルタ関数で表せる

A. Asano, Kansai Univ.

Radon変換

$g(s,\theta)$は？



この線上では

$$x\cos\theta + y\sin\theta - s = 0$$

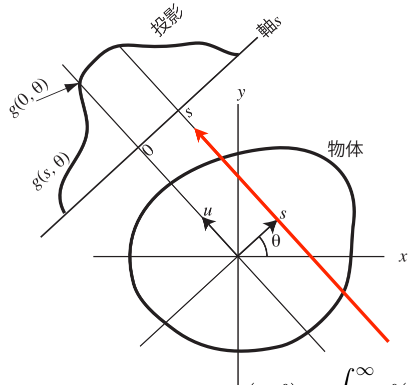
$$g(s,\theta) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - s)dxdy$$

Radon変換

A. Asano, Kansai Univ.

ray-sum

投影を1次元の線積分で表す



(x, y) と (s, u) の関係は θ の回転

$$\begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix}$$

(x, y) を (s, u) で表す

この線上では
s が一定で u が変化

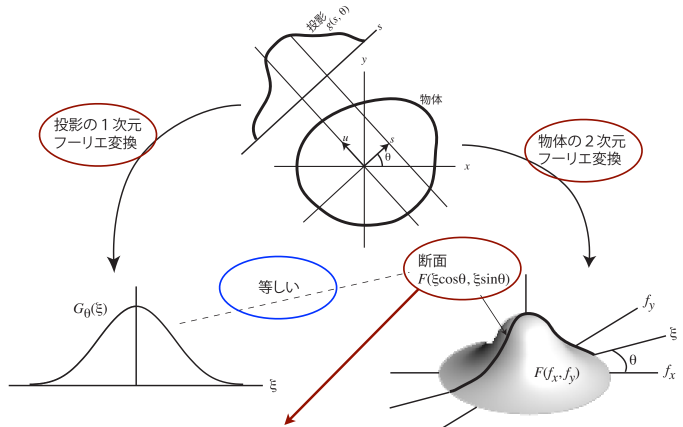
$$g(s,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s\cos\theta - u\sin\theta, s\sin\theta + u\cos\theta)du$$

ray-sum

A. Asano, Kansai Univ.

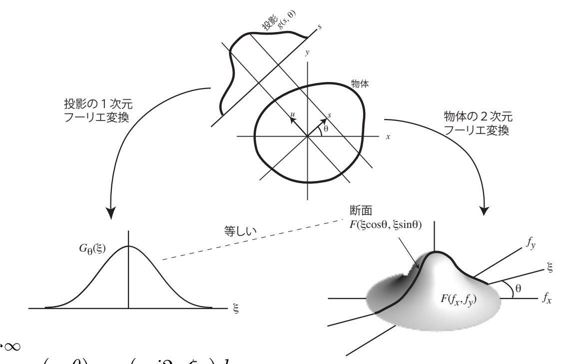
投影定理

投影群から2次元関数を再構成する



「断面」がすべてそろえば，2次元逆フーリエ変換で
2次元関数が再構成できる

投影定理の証明



$$G_\theta(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s,\theta)\exp(-i2\pi\xi s)ds$$

ray-sum $$g(s,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s\cos\theta - u\sin\theta, s\sin\theta + u\cos\theta)du$$

投影定理の証明

$$G_\theta(\xi) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(s\cos\theta - u\sin\theta, s\sin\theta + u\cos\theta) \times \exp(-i2\pi\xi s)dsdu$$

$$dxdy = dsdu$$

(x,y)と(s,u)の関係

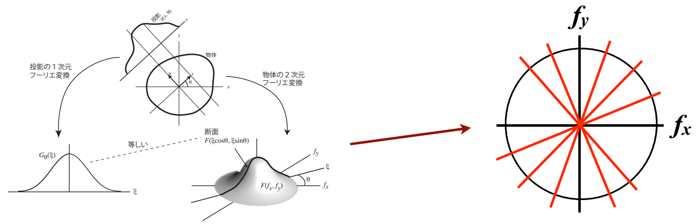
$$\begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} G_\theta(\xi) &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \exp(-i2\pi\xi(x\cos\theta + y\sin\theta))dxdy \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \exp(-i2\pi((\xi\cos\theta)x + (\xi\sin\theta)y))dxdy \\ &= F(\xi\cos\theta, \xi\sin\theta) \end{aligned}$$

フーリエ変換法による再構成の問題点

2次元フーリエ変換の
「すべての断面」を求めることはできない



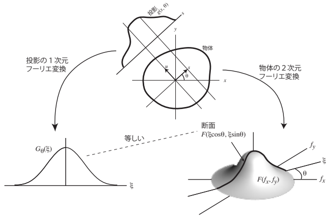
ひとつの投影＝ひとつの断面

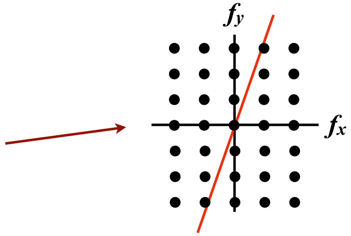
有限個の投影では，2次元フーリエ変換を埋め尽くす
ことはできない

→補間を行う

フーリエ変換法による再構成の問題点

補間を行う。が, コンピュータで計算する限りは「離散的」





周波数空間の誤差は, 画像全体に
ひろがるアーティファクトを生む

断面は極座標

2次元フーリエ変換は
正方座標

コンピュータの能力が低かった時代は
精密な計算が難しかった
→さてどうした？