2019年度秋学期 画像情報処理　第12回

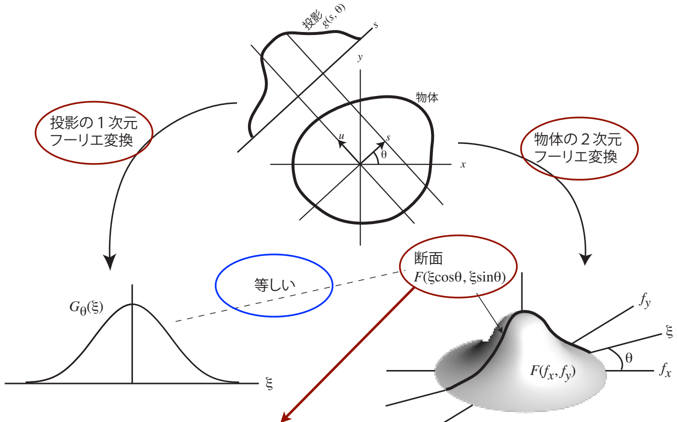
逆投影法による再構成

浅野 晃
関西大学総合情報学部

投影定理の復習

投影定理

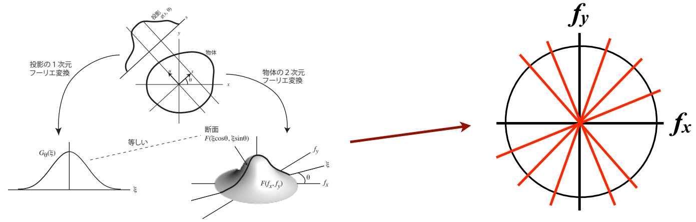
投影群から2次元関数を再構成する



「断面」がすべてそろえば，2次元逆フーリエ変換で
2次元関数が再構成できる

フーリエ変換法による再構成の問題点

2次元フーリエ変換の
「すべての断面」を求めることはできない



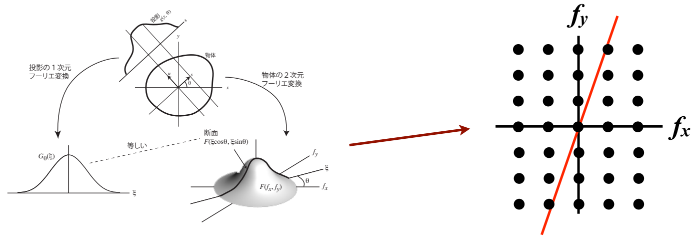
ひとつの投影＝ひとつの断面

有限個の投影では，2次元フーリエ変換を埋め尽くす
ことはできない
→補間を行う

A. Asano, Kansai Univ.

フーリエ変換法による再構成の問題点

補間を行う。が，コンピュータで計算する限りは「離散的」



周波数空間の誤差は，画像全体に
ひろがるアーティファクトを生む

断面は極座標

2次元フーリエ変換は
正方座標

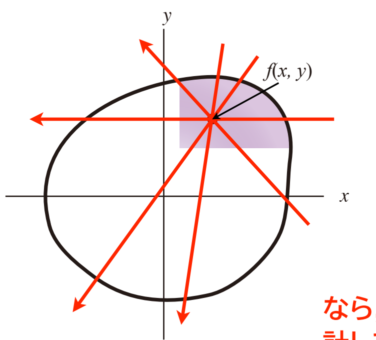
コンピュータの能力が低かった時代は
精密な計算が難しかった
→さてどうした？

A. Asano, Kansai Univ.

逆投影法💡

A. Asano, Kansai Univ.

素朴な再構成 ー 逆投影



2次元関数の任意の点
f(*x*, *y*) での値は

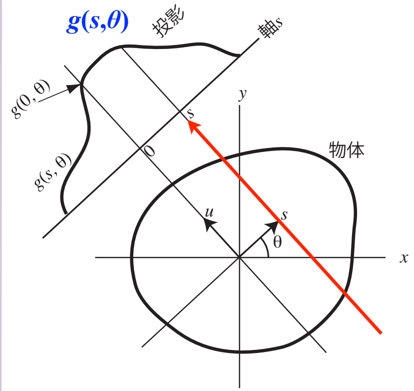
f(*x*, *y*) を通るすべての投影
(線積分)がわかれば求め
られる

なら，それらの線積分をすべて合
計してみれば？

どの線積分にも *f*(*x*, *y*) は含まれているのだから，
合計したら *f*(*x*, *y*) が強調される？

A. Asano, Kansai Univ.

逆投影法



この線上では

$$x\cos\theta + y\sin\theta - s = 0$$

つまり

$$s = x\cos\theta + y\sin\theta$$

よって投影は

$$g(x\cos\theta + y\sin\theta, \theta)$$

これを半周分足し合わせたのが
逆投影

$$b(x, y) = \int_0^{\pi} g(x\cos\theta + y\sin\theta, \theta)d\theta$$

復元できているのか？ *f*(*x*, *y*) とどれほど違うのだろうか？

復元できているのだろうか？

$$s = x\cos\theta + y\sin\theta$$

Radon変換

$$g(s,\theta) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - s)dxdy$$

逆投影 $$b(x,y) = \int_0^\pi g(x\cos\theta + y\sin\theta, \theta)d\theta$$

$$\begin{aligned} b(x,y) &= \int_0^\pi \left[\iint_{-\infty}^{\infty} f(x',y')\delta(x'\cos\theta + y'\sin\theta - (x\cos\theta + y\sin\theta))dx'dy'\right]d\theta \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x',y')\left[\int_0^\pi \delta((x'-x)\cos\theta + (y'-y)\sin\theta)d\theta\right]dx'dy' \end{aligned}$$

復元できているのだろうか？

$$\begin{aligned} b(x,y) &= \int_0^\pi \left[\iint_{-\infty}^{\infty} f(x',y')\delta(x'\cos\theta + y'\sin\theta - (x\cos\theta + y\sin\theta))dx'dy'\right]d\theta \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x',y')\left[\int_0^\pi \delta((x'-x)\cos\theta + (y'-y)\sin\theta)d\theta\right]dx'dy' \end{aligned}$$

$h(\theta)$が有限個のθ_kでしか0にならないとき

$$\delta[h(\theta)] = \sum_k \frac{1}{|h'(\theta_k)|}\delta[\theta - \theta_k]$$

三角関数を合成

$$(x'-x)\cos\theta + (y'-y)\sin\theta = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}\sin(\theta+\alpha),$$
$$\alpha = \cos^{-1}\frac{y'-y}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}} = \sin^{-1}\frac{x'-x}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}}$$

$\theta = \pi - \alpha$ のときだけ0

$$\delta((x'-x)\cos\theta + (y'-y)\sin\theta) = \frac{1}{\left|\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}\cos(\pi)\right|}\delta(\theta - (\pi - \alpha))$$

復元できているといえなくもない

$$\begin{aligned} b(x,y) &= \int_0^\pi \left[\iint_{-\infty}^{\infty} f(x',y')\delta(x'\cos\theta + y'\sin\theta - (x\cos\theta + y\sin\theta))dx'dy'\right]d\theta \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x',y')\left[\int_0^\pi \delta((x'-x)\cos\theta + (y'-y)\sin\theta)d\theta\right]dx'dy' \end{aligned}$$

積分すると1

$$\delta((x'-x)\cos\theta + (y'-y)\sin\theta) = \frac{1}{\left|\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}\cos(\pi)\right|}\delta(\theta - (\pi - \alpha))$$

よって

$$\begin{aligned} b(x,y) &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x',y')\left[\frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}}\right]dx'dy' \\ &= f(x,y) * \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] \end{aligned}$$

コンヴォリューションになっている

復元するには

$$b(x,y) = f(x,y) * \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$$

フーリエ変換すると，コンヴォリューション→積

$$FT[b(x,y)] = FT[f(x,y)] \times FT\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$$

$$\therefore\ FT[f(x,y)] = FT[b(x,y)]/FT\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$$

$$FT\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{f_x^2+f_y^2}}$$ なので

$$FT[f(x,y)] = \sqrt{f_x^2+f_y^2} \times FT[b(x,y)]$$

A. Asano, Kansai Univ.

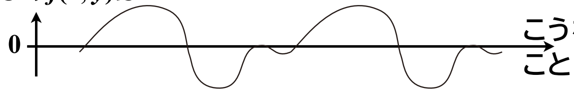
これでいいのでしょうか？

$$FT[f(x,y)] = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \times FT[b(x,y)]$$

$f_x = f_y = 0$ 周波数0の成分は

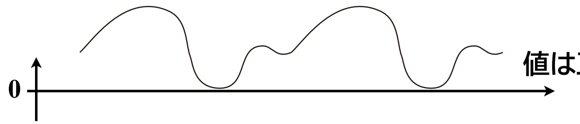
$FT[f(x,y)] = 0$ 全体の平均が0

つまり$f(x,y)$は



こうなっていることになる

おかしい。吸収率なんだから



値は正のはず

そもそも

$$FT[b(x,y)] = FT[f(x,y)] \times FT\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$$

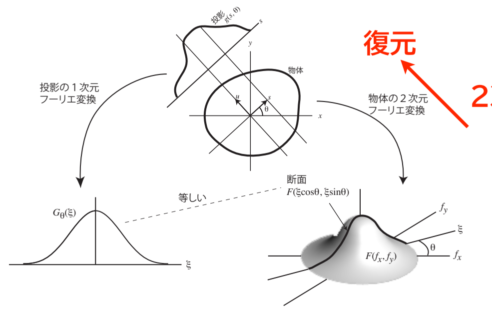
$$FT\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{f_x^2+f_y^2}}$$

$f_x = f_y = 0$ で発散している

A. Asano, Kansai Univ.

フィルタ補正逆投影法

再び投影定理



復元

2次元逆フーリエ変換

$$f(x,y) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(f_x, f_y) \exp(i2\pi(f_x x + f_y y)) df_x df_y$$

A. Asano, Kansai Univ.

フィルタ補正逆投影法

$$f(x,y) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(f_x, f_y) \exp(i2\pi(f_x x + f_y y)) df_x df_y$$

極座標に変換 $f_x = \xi\cos\theta,\ f_y = \xi\sin\theta$

$$f(x,y) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} F(\xi\cos\theta, \xi\sin\theta) \exp(i2\pi\xi(x\cos\theta + y\sin\theta))\xi d\xi d\theta$$

投影定理より

$$G_\theta(\xi) = F(\xi\cos\theta, \xi\sin\theta)$$

$$f(x,y) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} G_\theta(\xi) \exp(i2\pi\xi(x\cos\theta + y\sin\theta))\xi d\xi d\theta$$

A. Asano, Kansai Univ.

フィルタ補正逆投影法

$$f(x,y) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} G_\theta(\xi) \exp(i2\pi\xi(x\cos\theta + y\sin\theta))\xi d\xi d\theta$$

積分区間を変換

$$f(x,y) = \int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_\theta(\xi) \exp(i2\pi\xi(x\cos\theta + y\sin\theta))|\xi| d\xi d\theta$$

$$s = x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$f(x,y) = \int_0^{\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} |\xi| G_\theta(\xi) \exp(i2\pi s\xi) d\xi\right] d\theta$$

$|\xi| G_\theta(\xi)$ の逆フーリエ変換

フィルタ補正逆投影法

$$f(x,y) = \int_0^{\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \underline{|\xi| G_\theta(\xi)} \exp(i2\pi s\xi) d\xi \right] d\theta$$

$|\xi| G_\theta(\xi)$ の逆フーリエ変換

$$\hat{g}(s,\theta) \equiv \hat{g}(x\cos\theta + y\sin\theta, \theta) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |\xi| G_\theta(\xi) \exp(i2\pi s\xi) d\xi$$

とおくと，

$$f(x,y) = \int_0^{\pi} \hat{g}(x\cos\theta + y\sin\theta, \theta) d\theta$$

投影を，
「周波数空間で $|\xi|$ 倍するフィルタ」を
適用してから，逆投影

A. Asano, Kansai Univ.

コンヴォリューション逆投影法

$$\hat{g}(s,\theta) \equiv \hat{g}(x\cos\theta + y\sin\theta, \theta) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \underline{|\xi| G_\theta(\xi)} \exp(i2\pi s\xi) d\xi$$

ある角度 θ での投影を
周波数空間で $|\xi|$ 倍 → 実空間では $FT^{-1}[|\xi|]$
とのコンヴォリューション

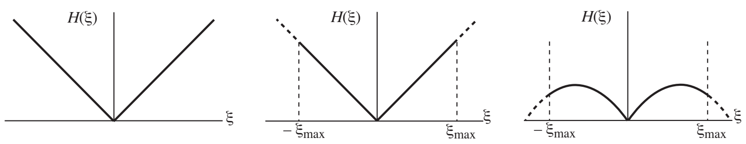
$$\hat{g}(s,\theta) = g(s,\theta) * \underline{FT^{-1}[|\xi|]}$$

最初からこれを定義しておけば
フーリエ変換の必要はない

極座標→直交座標の変換は実空間で行うので，
誤差が画面全体に拡散することはない

A. Asano, Kansai Univ.

フィルタ関数



(a) (b) (c)

$|\xi|$

$$H(\xi) = |\xi| \mathrm{rect}\left(\frac{\xi}{2\xi_{\max}}\right)$$

$$H(\xi) = |\xi| \mathrm{sinc}\left(\frac{\xi}{2\xi_{\max}}\right) \mathrm{rect}\left(\frac{\xi}{2\xi_{\max}}\right)$$

高い周波数成分を増幅すると
ノイズを強調してしまうので，抑える

A. Asano, Kansai Univ.