

演習 (1)

1. 次の各項に問題点があれば指摘せよ。

- (a) 世論調査のため、「あなたは、『公共事業へのこれ以上の投資は、財政への影響が深刻なので取りやめるべきである』と思いますか」というアンケートを行った。
- (b) 宣告が70%当たる占い師と10%しか当たらない占い師とでは、70%当たる占い師のほうが、どんな問題に対しても常に信用できる。
- (c) 「同量の紅茶葉とコーヒー豆では、紅茶のほうがカフェインの含有量が多い」のが事実であれば、カフェインの摂取量を制限する必要がある場合は、どちらかといえば紅茶よりもコーヒーを飲むほうがよい。
- (d) A社の電球の平均寿命は、B社の電球の平均寿命よりも長い。したがって、価格等他の条件が同じなら、どんな場合でもA社の電球を使うのがよい。
- (e) 「『Y食品株式会社』の1980年と2010年の販売額と、その中でパイナップル缶詰・パイナップルジュースの占める割合」について、図1のグラフで表示した。
- (f) 全国の都道府県について、死亡率と婚姻率(それぞれ、人口1000人あたりの死亡・婚姻の数)を調べたところ、死亡率と婚姻率には負の相関があることがわかった。したがって、人の死亡と婚姻には何らかの因果関係があるものと考えられる。

2. 次の各問に答えよ。

- (a) 決定係数の意味を、「分散を説明する」という言葉を使って説明せよ。
- (b) X, Y の2つの変量からなるデータがあり、変量 X から変量 Y への回帰直線を求めるとする。このとき、 X と Y の間に相関がないとすると、回帰直線は散布図上でどのような直線になるか。

3. 表1は、ある病気の検査法について、その有効性を試験した結果である。

- (a) この検査法の感度と特異度を求めよ。
- (b) 検査法の優劣を評価するのに、感度だけではなく特異度も考慮しなければならない理由を説明せよ。

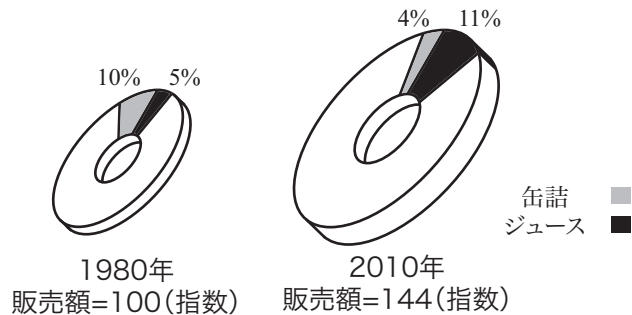


図 1: 問題 1e の図

表 1: 問題 3 の表 (単位: 人)

	本当に病気である	本当は病気ではない
検査で陽性	9,000	1,000
検査で陰性	1,000	19,000

4. 5人の生徒に英語と数学の試験を行なった。各生徒の得点は、(英語の点数, 数学の点数) の形で表すと、それぞれ $(50, 60)$, $(55, 55)$, $(70, 75)$, $(75, 90)$, $(80, 80)$ であった。

(a) 回帰直線を求め、各生徒の得点とともに散布図に表わせ。

(b) 決定係数を求めよ。さらに、決定係数と回帰直線の関係を、本問を例にとって説明せよ。

解答例

1.

- (a) 「『公共事業へのこれ以上の投資は、財政への影響が深刻である』と思いますか」という質問と、「『公共事業へのこれ以上の投資は取りやめるべきである』と思いますか」という質問の、2つの質問がひとつに交じり合っている。いわゆるダブルバーレル質問である。問題のような質問では、「公共事業へのこれ以上の投資は財政への影響が深刻であるが、それでも実施すべきである」「公共事業へのこれ以上の投資は、財政への影響はあまりないが、それでも実施すべきではない」という意見の持ち主は解答することができない。
- (b) 問題が二者択一で答えられるものならば、「10%しか当たらない占い師」が告げたほうとは逆の選択肢を選べば90%当たっていることになり、「70%当たる占い師」が告げた選択肢よりも当たっている確率は大きい。
- (c) 同量の葉・豆を比較しても意味はなく、淹れた後の同量の液を比べなければならない。通常、紅茶の液はコーヒーの液よりもずっと薄い。
- (d) 電球の用途が、例えば家庭の電灯のように「切れたらその時点で取り換える」ようなものなら、平均寿命が長いほうの電球を選べばよい。しかし、交通信号機のように、常時使用し続けなければならないならず、故障の許されない装置の場合は、故障するよりも前に、ある期間ごとにいっせいに電球を交換するほうが安全である。この場合は、平均寿命よりも「最低保証寿命」が長い電球を選ぶほうが有利である。もし、A社の電球の寿命の分散が大きく、B社の電球の寿命の分散が小さいならば、最低保証寿命はB社の電球のほうが長いこともありうる。
- (e) (1) グラフの下の数字では、2000年の販売額は1980年の1.44倍となっている。しかし、一見したときに販売額の比を表現しているのはグラフの面積の比であり、このグラフでは面積比が2倍になっているので、販売額の比が実際よりも誇張されている。(2) グラフの円板の厚みは何の情報も持っていないのに2000年の方が厚くなっているのも、やはり販売額の比が実際よりも誇張されている。(3) ジュースを黒、缶詰をグレーで表している。黒の部分は、グレーの部分よりも手前に大きく描いてある。また、黒の方が目立つし、また境界線の太さもグラフの黒い部分に含まれている。これらのことで、ジュースの比率の増加を実際よりも誇張する結果になっている。比較される2つのものは、対等な表示法で表すべきである。
- (f) 「死亡率と婚姻率の相関関係」と「死亡と婚姻の因果関係」は別のものである。また、この相関関係は「みかけ上の相関関係」であり、実際には、死亡率の高い県は高齢化が進み若年人口が少ないので婚姻率が低い、と考えられる。
2. (a) 変量 X から変量 Y への回帰を考えるとき、 X と Y の決定係数は、もとの Y の分散に比べて回帰直線に対しての Y のばらつきがどれだけ減少しているか、を表している。例えば、決定係数が0.7であれば、もとの Y の分散のうち70%は、線形単回帰モデルをあてはめることで「ただ単にばらついているのではなく、回帰直線上に並んでいる」という説明ができる、という意味になる。
- (b) X から Y への回帰の回帰係数は「 $(X, Y$ の共分散) / $(X$ の分散)」で求められる。 X と Y の間に相関がないとき、共分散が0なので、回帰係数は0となる。すなわち、回帰直線の傾きは0で、回帰直線は X 軸に平行な直線となる。また、回帰直線は散布図上で $(X$ の平均, Y の平均) という点を通るので、答えは「 $(X$ の平均, Y の平均) を通り X 軸に平行な直線」となる。

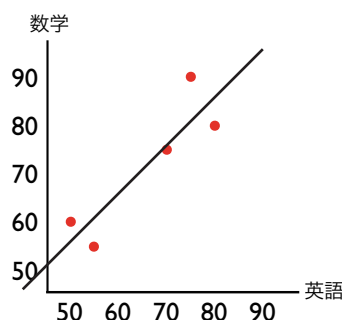


図 A1: 問題 2: 散布図と回帰直線

3. (a) 感度は「本当に病気の人のうち、検査で陽性となった人の割合」で、 $9000/(9000+1000) = 0.9$ である。また、特異度は「本当は病気でない人のうち、検査で陰性となった人の割合」で、 $19000/(1000+19000) = 0.95$ である。
- (b) 感度だけを高くすればよいのであれば、検査をせずにすべての被験者を陽性とすれば、感度は 1 すなわち 100% となる。しかし、そのような検査には意味はなく、「本当は病気でない人」を正しく陰性と判定する（誤って陽性としない）ことも、検査の重要な能力である。したがって、すぐれた検査であるためには、感度だけでなく特異度も高くなくてはならない。

4.

- (a) 英語の点数を x 、数学の点数を y で表し、生徒数を n とする。 i 番目の受験者の点数を (x_i, y_i) とし、 x, y の平均をそれぞれ \bar{x}, \bar{y} 、 x の分散を σ_x^2 、 x, y の共分散を σ_{xy} とし、表 A1 の通り計算すると、 $n = 5$ 、 $\bar{x} = 66$ 、 $\bar{y} = 72$ 、 $\sigma_{xy} = 665/5 = 133$ 、 $\sigma_x^2 = 670/5 = 134$ であるから、回帰方程式を $y = a + bx$ とすると

$b = \frac{133}{134} = 0.993$ 、 $a = 72 - 0.993 \cdot 66 = 6.46$ となる。散布図と回帰直線は図 A1 の通りである。

(解説) 回帰直線のグラフを描くためには、直線がどこを通るかを確かめてみます。 $x = 50$ を回帰方程式 $y = 6.46 + 0.993x$ に代入すると、 $y = 56.11$ となりますから、回帰直線は $(50, 56.11)$ を通ります。

先に散布図を描いておいて、回帰直線がだいたいどんな感じかの見当をつけておきましょう。計算で回帰直線を求めた後で、その計算が間違っていないかどうか確かめることができます。

- (b) 表のように計算すると、相関係数 r は $r = \frac{665}{\sqrt{670}\sqrt{830}} = 0.892$ となり、決定係数 $r^2 = 0.796$ となる。このことは、数学の点数が分布している理由を、「英語の点数から回帰方程式によって推定できる」と説明することで、もとの数学の点数の分散の 79.6% が説明できることを示している。

表 A1: 問題 4 の表

生徒	英語 x	数学 y	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$
1	50	60	256	144	192
2	55	55	121	289	187
3	70	75	16	9	12
4	75	90	81	324	162
5	80	80	196	64	112
	\bar{x}	\bar{y}	計	計	計
	66	72	670	830	665