2019年度春学期　統計学　第１１回

分布の「型」を考える —
確率分布モデルと正規分布

浅野　晃
関西大学総合情報学部

ちょっと前回の復習

「統計的推測」とは

調べたい集団の，
データ全体を調べられるか？

日本男性全員の身長を調べられるか？

データの一部を調べて
度数分布を推測する

いや，せめて平均や分散を推測する

統計的推測

無作為抽出

データの集団から，いくつかの数値を
公平なくじびきで選ぶ

［無作為標本抽出］という

調べたい（が全部を調べるの
は無理な）集団［母集団］

調べられる程度のデータ
［標本（サンプル）］

度数分布で考えると

母集団の度数分布

階級値	相対度数
162.5	15%
167.5	20%
172.5	20%
177.5	10%

無作為抽出 →

標本の［確率分布］

階級値	選ばれる確率
162.5	15%
167.5	20%
172.5	20%
177.5	10%

確率分布と確率変数

つまり

母集団の度数分布（母集団分布） ＝ 標本の確率分布

階級値	選ばれる確率
162.5	15%
167.5	20%
172.5	20%
177.5	10%

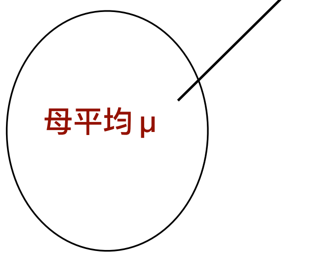
いくらとは決まっていないが，

確率分布が決まっている

［確率変数］という

母平均の推定

母集団（日本男性全体）



標本として数値をいくつか取り出して，それらの平均

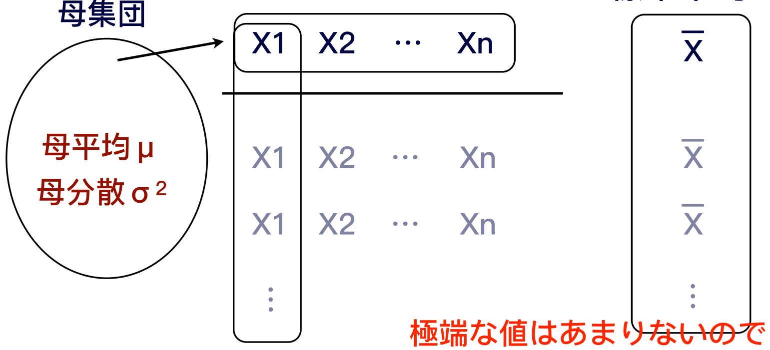
［標本平均］

標本平均は母平均に近い値になるか？

母平均が知りたい

が，日本男性全員は調べられない

母平均の推定



極端な値はあまりないので分散が小さくなる

母集団と同じ

期待値μ

分散σ²

期待値μ

分散 σ²/n

母平均の推定

母平均がμ
母分散がσ²
のとき，標本平均の期待値がμ
標本平均の分散がσ²/n

仮に何度も標本を抽出して，何度も標本平均を計算したとすると

分散が小さくなっているので，
たいてい，ほぼ母平均に近い値になる

いま１回だけ計算した標本平均も，
おそらく，ほぼ母平均に近い値だろう

母平均の推定

いま１回だけ計算した標本平均も，
おそらく，ほぼ母平均に近い値だろう

どのくらい近い？

どのくらいの確率で？
はずれる確率は？

このあたりを
今回から考える

分布の「型」を考える🤔

母平均の推定

いま１回だけ計算した標本平均も，
おそらく，ほぼ母平均に近い値だろう

どのくらい近い？

どのくらいの確率で？
はずれる確率は？

計算するには，
式で表されてないといけない

母集団分布は

つまり

母集団の度数分布（母集団分布） ＝ 標本の確率分布

階級値	選ばれる確率
162.5	15%
167.5	20%
172.5	20%
177.5	10%

これは式ではなく
数値の集まり，
計算できない

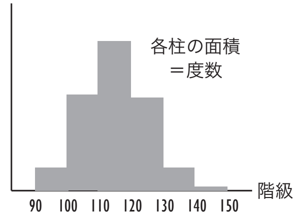
式で表す

度数分布を

階級値	選ばれる確率
162.5	15%
167.5	20%
172.5	20%
177.5	10%

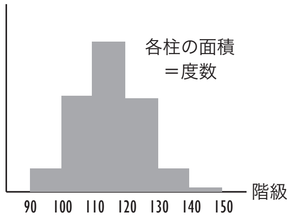
何かの式で書ける
ものと仮定する

ヒストグラムが



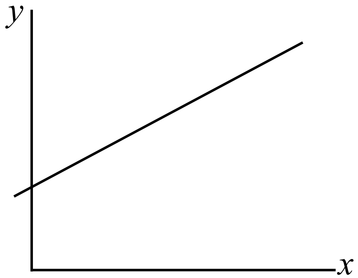
何かの式で表される
関数のグラフである
と仮定する

確率分布モデルとパラメータ



何かの式のグラフで
あると仮定する

直線のモデル



式＝［確率分布モデル］

$$y = ax + b$$

パラメータ

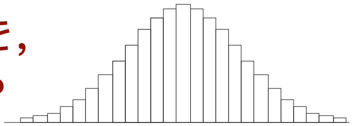
パラメータを推定す
ればグラフが描ける

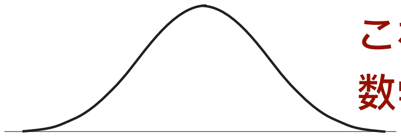
連続型確率分布📈

A. Asano, Kansai Univ.

ヒストグラムを式で表す

こんなヒストグラムを，
式で書けるだろうか？





これを表す式のほうが
数学は簡単。

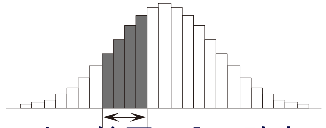
階級の区切り方が
どんどん細かくなって，
見えなくなったと考える

［連続型確率分布］

A. Asano, Kansai Univ.

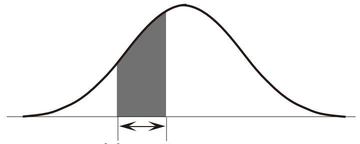
連続型確率分布

ヒストグラム



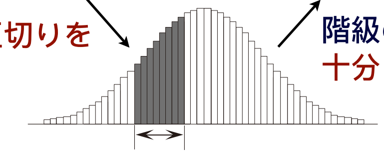
ある範囲に入る確率
＝柱の面積の合計

［連続型確率分布］



同じ範囲なら
柱の面積の合計は同じ

階級の区切りを
細かく



階級の区切りを
十分に細かく

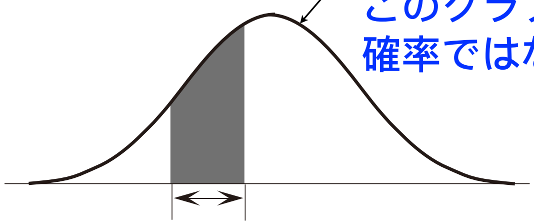
同じ範囲なら
柱の面積の合計は同じ

A. Asano, Kansai Univ.

確率密度関数と確率

ヒストグラムの上の縁＝
［確率密度関数］

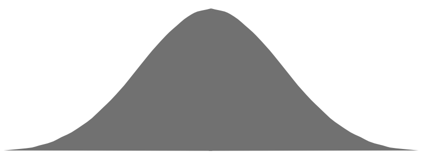
このグラフが示すのは
確率ではない



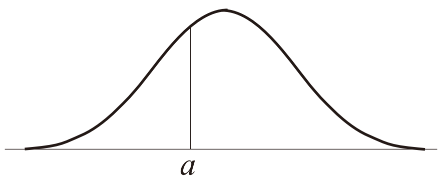
この範囲に入る確率＝この面積
＝確率密度関数の積分

A. Asano, Kansai Univ.

確率密度関数の矛盾？



連続型確率変数が
すべての実数のうちの
どれかになる確率
＝1 (100%)

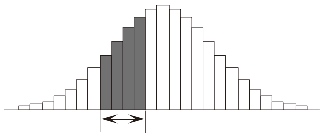


連続型確率変数が
ある特定の値aになる確率
＝0

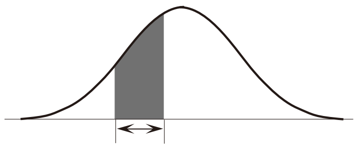
幅が0だから，面積も0

なんかヘン？
演習の解答例の付録で

連続型確率分布は，数学の都合



こんなのより



こんなののほうが
数式にしやすい

実際のデータは，有限の桁数の数字
で表されている限り，必ず離散的。

正規分布モデル

正規分布モデル

世の中には，［正規分布モデル］で表せる
ような母集団分布がたくさんある

長さの測定値の分布
センター試験の成績の分布　…

［中心極限定理］

母集団のばらつきの原因が
無数の独立な原因の和のとき，
母集団分布は概ね正規分布になる

正規分布の特徴

パラメータが平均（期待値）と分散
μ　　　σ^2

（わかりやすいものを推定すればよい
ので都合がいい）

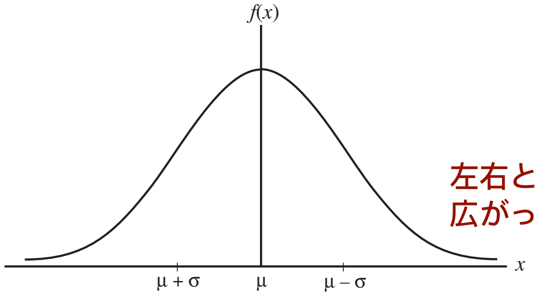
確率変数Xの確率分布が
期待値μ，分散σ^2の正規分布であることを
確率変数XがN(μ, σ^2)にしたがう　という

※英語ではnormal distribution，中国語では「常態分配」

正規分布の特徴

パラメータが平均（期待値）と分散
μ　σ²

確率密度関数はこんな形



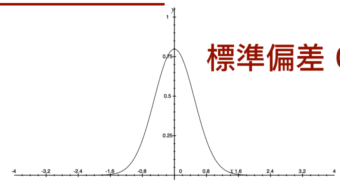
左右とも無限に
広がっている

A. Asano, Kansai Univ.

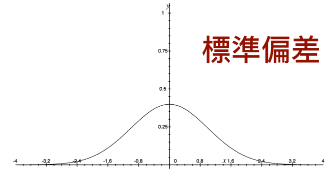
正規分布の特徴

期待値0の正規分布の
確率密度関数

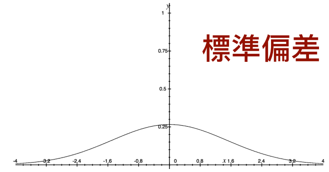
標準偏差 0.5



標準偏差 1.0



標準偏差 1.5

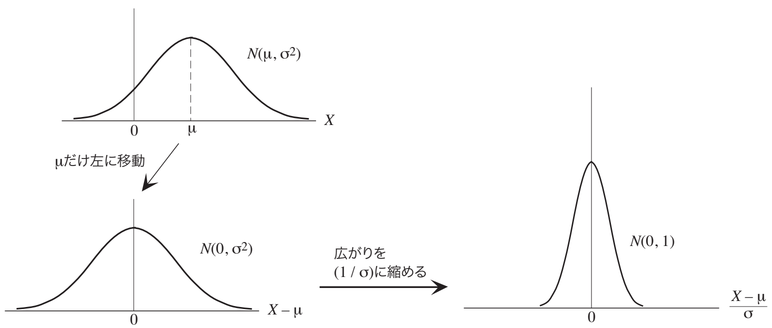


標準偏差が大きくなると
中央部の広がりが大きくなり
高さが低くなる

A. Asano, Kansai Univ.

正規分布の性質 1

確率変数XがN(μ , σ²)にしたがう　とき



(X- μ)/ σ　はN(0, 1)にしたがう

A. Asano, Kansai Univ.

正規分布の性質 1

確率変数XがN(μ , σ²)にしたがう　とき

(X- μ)/ σ　はN(0, 1)にしたがう

「標準得点」と同じ

変換しても,
やはり正規分布になる

N(0,1)を［標準正規分布］という

A. Asano, Kansai Univ.

正規分布の性質２

サイズnの標本１セット　標本平均

母集団

母平均μ
母分散σ²

正規分布なら
N(μ,σ²)

X1	X2	…	Xn	$\bar{X}$
X1	X2	…	Xn	$\bar{X}$
X1	X2	…	Xn	$\bar{X}$
⋮				

母集団と同じ
期待値μ
分散σ²

こちらも
正規分布になる

期待値μ
分散　σ²/n

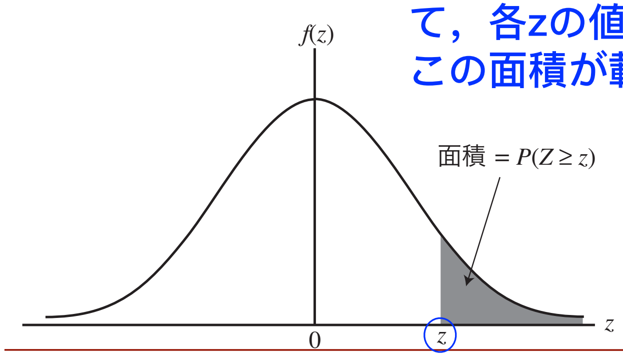
N(μ,σ²/n)

正規分布表の使いかた🔢

正規分布にもとづく計算

正規分布にしたがう確率変数が
ある範囲に入る確率

数表を使って求める　標準正規分布について，各zの値に対するこの面積が載っている



正規分布にもとづく計算

例）確率変数XがN(50, 10²)にしたがうとき，Xが60以上である確率を求めよ。

性質１により，Z = (X - 50) / 10 と変換
Zは標準正規分布にしたがう

X=60のとき，Z=(60 - 50) / 10 = 1

よって，求めるのは，Zが1以上である確率

$$P(Z \geqq 1)$$

正規分布にもとづく計算

$P(Z \geqq z)$ を求める

zの小数第２位

zの小数第１位まで

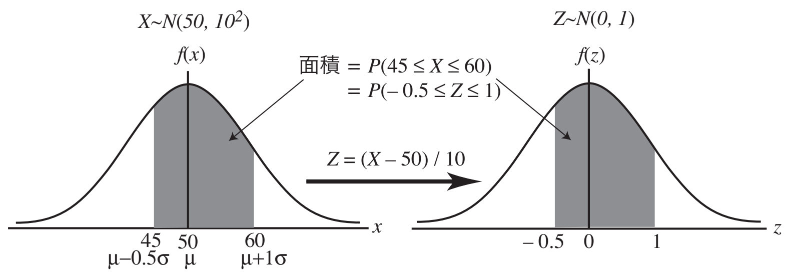
	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	
0.0	0.50000	0.49601	0.49202	0.48803	0.48405	0.48006	
0.1	0.46017	0.45620	0.45224	0.44828	0.44433	0.44038	
0.2	0.42074	0.41683	0.41294	0.40905	0.40517	0.40129	···
0.3	0.38209	0.37828	0.37448	0.37070	0.36693	0.36317	
0.4	0.34458	0.34090	0.33724	0.33360	0.32997	0.32636	
			⋮				
1.0	0.15866	0.15625	0.15386	0.15151	0.14917	0.14686	···

$P(Z \geqq 1)$

A. Asano, Kansai Univ.

正規分布にもとづく計算

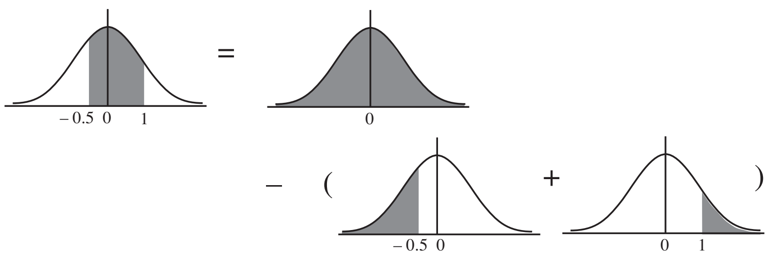
演習の２



A. Asano, Kansai Univ.

正規分布にもとづく計算

演習の２



A. Asano, Kansai Univ.