2020年度秋学期 画像情報処理　第3回

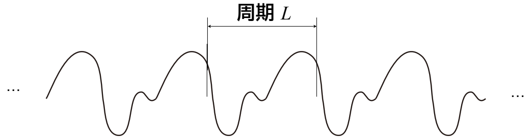
フーリエ変換とサンプリング定理

浅野 晃
関西大学総合情報学部

フーリエ変換🤔

周期関数は, フーリエ級数で表される

周期 L の周期関数 $f(x)$

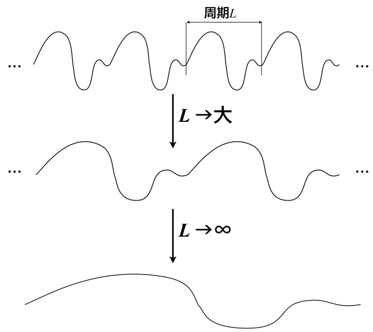


$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L} x\right)$$

という, 波の足し合わせ(級数)で表される
(フーリエ級数展開)

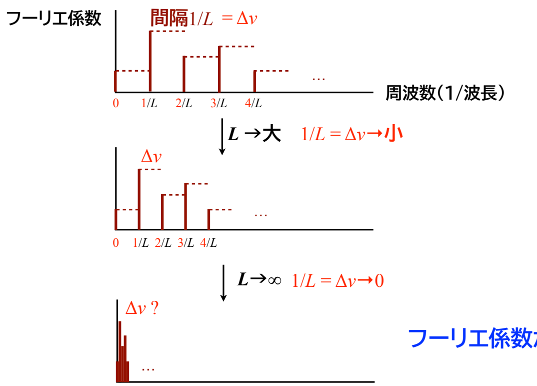
係数 a_k(フーリエ係数)は $a_k = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)\exp\left(-i2\pi\frac{k}{L}x\right)dx$

周期関数でない場合は？



非周期関数は周期が無限大と考える

周期 L が大きくなっていくと



間隔$1/L$ は周波数の差

これを$\Delta\nu$ で表す

フーリエ係数が隙間なく並ぶ

↓

もはや足し算はできない

級数から積分へ

周期 L の周期関数 $f(x)$ は,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L} x\right)$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \exp\left(-i2\pi \frac{n}{L} x\right) dx$$

$1/L = \Delta\nu$ と書き換える

紛らわしいので別の文字にしただけ

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\Delta\nu \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(\tau) \exp\left(-i2\pi n\Delta\nu\tau\right) d\tau\right) \exp\left(i2\pi n\Delta\nu x\right)$$

級数から積分へ

$n\Delta\nu$ はある周波数を表すので, ν であらわす

$L\to\infty$ のとき $\Delta\nu\to 0$

このとき $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\Delta\nu \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(\tau) \exp\left(-i2\pi n\Delta\nu\tau\right) d\tau\right) \exp\left(i2\pi n\Delta\nu x\right)$ のなかの総和(Σ)が,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp\left(-i2\pi\nu\tau\right) d\tau\right) \exp\left(i2\pi\nu x\right) d\nu$$

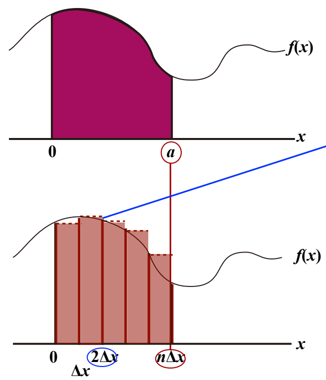
という積分になる

？？？😮

積分とは？

この面積を求めたい

幅が Δx の長方形で近似



高さ $f(2\Delta x)$

短冊の面積の合計

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k\Delta x)\Delta x$$

↓ $\Delta x \to 0$ 区切りを無限に細かく

$$\int_0^a f(x)dx$$

これが積分

級数から積分へ

$n\Delta\nu$ はある周波数を表すので, ν であらわす

$L\to\infty$ のとき $\Delta\nu\to 0$

このとき $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\Delta\nu\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(\tau)\exp\left(-i2\pi n\Delta\nu\tau\right)d\tau\right)\exp\left(i2\pi n\Delta\nu x\right)$ のなかの総和(Σ)が,

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\exp\left(-i2\pi\nu\tau\right)d\tau\right)\exp\left(i2\pi\nu x\right)d\nu$$

という積分になる

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k\Delta x)\Delta x$$

$\Delta x\to 0$ 区切りを無限に細かく

$$\int_0^a f(x)dx$$

！！！

フーリエ変換

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\exp\left(-i2\pi\nu\tau\right)d\tau\right)\exp\left(i2\pi\nu x\right)d\nu$$

$$F(\nu)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp\left(-i2\pi\nu x\right)dx$$ と分けて書く

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)\exp\left(i2\pi x\nu\right)d\nu$$

フーリエ変換対 という

フーリエ変換

$$F(\nu)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp\left(-i2\pi\nu x\right)dx$$ フーリエ変換

関数 $f(x)$ にどのような周波数の波がどれだけ含まれているか,「波を切り出す」

フーリエ係数の並びだったのが, 周波数の間隔がどんどん小さくなって,
ついにはひとつの関数 $F(\nu)$ になる

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)\exp\left(i2\pi x\nu\right)d\nu$$ 逆フーリエ変換

周波数 ν の波 $\exp(i2\pi x\nu)$ に, 対応するフーリエ係数 $F(\nu)$ をかけたものを
合計(積分)すると $f(x)$ に戻る

2次元の場合は

1次元のフーリエ変換 $F(\nu)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp\left(-i2\pi\nu x\right)dx$

2次元のフーリエ変換 $F(\nu_x,\nu_y)=\iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\exp\{-i2\pi(\nu_x x+\nu_y y)\}dxdy$

この式は, x, y それぞれに1次元のフーリエ変換をしたことになっている

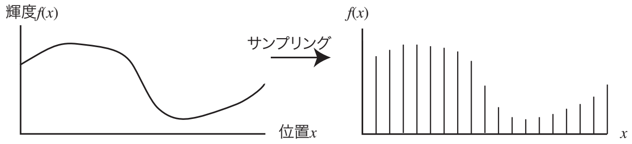
$$F(\nu_x,\nu_y)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\exp(-i2\pi\nu_x x)dx\right]\exp(-i2\pi\nu_y y)dy$$

注: $\underbrace{\exp(a+b)}_{\text{足し算}}=\underbrace{\exp(a)\exp(b)}_{\text{かけ算}}$

サンプリングとサンプリング定理🤔

サンプリングとサンプリング定理

連続関数を　　　　　離散的に



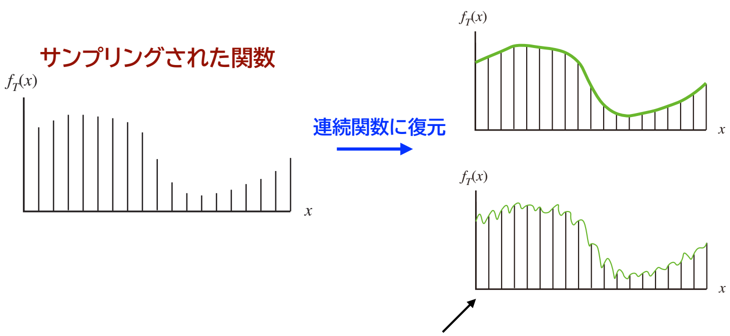
サンプリング定理

ある程度細かい間隔でサンプリングすれば，もとの連続関数に戻せる

どのくらい細かくなければならないかは，
もとの関数に含まれる最高の周波数による

「細かい」関数は
細かくサンプリング

サンプリング定理・直観的には



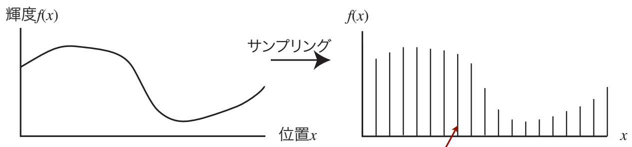
これが正解？

これだって
正解じゃないの？

もしこのような細かい動きが正解だとすれば，
細かい動きをとらえるにはサンプリングが粗すぎる，つまり
元の連続関数の最高の周波数に対して十分細かくサンプリングされていない

サンプリングとは

連続関数を　　　　　離散的に



この1本1本は何？　　ディラックのデルタ関数 $\delta(x)$

ディラックのデルタ関数 $\delta(x)$

$x = 0$ の1点以外すべてゼロ

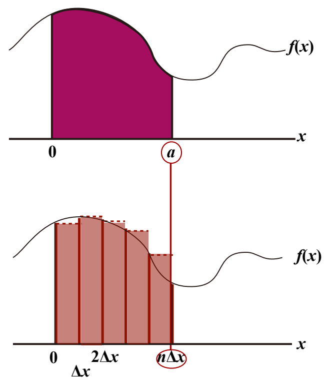
$$\delta(x) = 0 \ \ (x \neq 0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

$x = 0$ をはさんで積分すると1

何ですかこれ？？😮

積分って何でしたっけ

この面積を求めたい



幅が Δx の長方形で近似

🤔💬

しかし, デルタ関数は
1点以外すべてゼロで幅はないから
面積もないはず…

短冊の面積の合計

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k\Delta x)\Delta x$$

↓ $\Delta x \to 0$ 区切りを無限に細かく

$$\int_0^a f(x)dx$$ これが積分

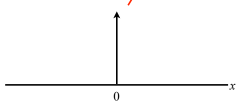
ディラックのデルタ関数 $\delta(x)$

$x = 0$ の1点以外すべてゼロ

$$\delta(x) = 0 \ \ (x \neq 0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

$x = 0$ をはさんで積分すると1

高さは, 何だともいえない （「無限」でもない。なぜなら→ $\int_{-\infty}^{\infty} k\delta(x)dx = k$

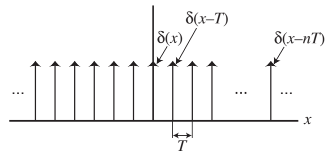


幅はなくても面積はあるんです。
だから, こんな「↑」で表さざるを得ない

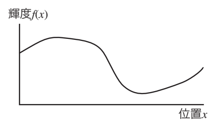
くし形関数 $\mathrm{comb}_T(x)$ とサンプリング

くし形関数 $\mathrm{comb}_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nT)$

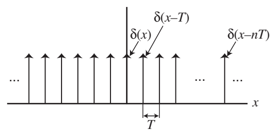
デルタ関数を等間隔に並べたもの



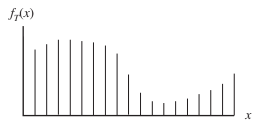
サンプリングとは, くし形関数とのかけ算 $f_T(x) = f(x)\mathrm{comb}_T(x)$



×



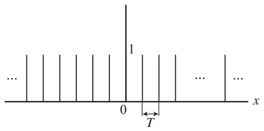
=



こんなややこしい関数でなければいけないの？

ディラックのデルタ関数ではなく,「縦棒」を並べて, くし形関数にしてはだめ？

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

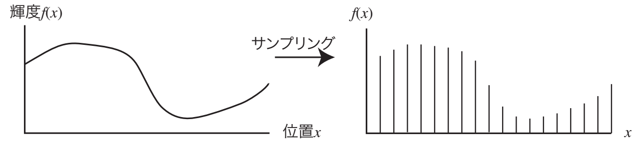


だめです🙅

縦棒の関数は, 幅がなくて高さ1だから, 積分したらゼロ
→画像の輝度の合計がゼロのはずはない

ディラックのデルタ関数は, 幅がないのに積分したら1 というヘンな関数（超関数）

サンプリングされたら, 周波数の範囲は？



周波数がある範囲内におさまっているとき　　サンプリングした後の周波数の範囲は？

サンプリングされた関数である $f_T(x)$ のフーリエ変換を求める

$$f_T(x) = f(x)\mathrm{comb}_T(x)$$

2つの関数のかけ算のフーリエ変換は？

かけ算のフーリエ変換

こうなります

$$FT[f(x)g(x)](\nu) = FT[f(x)](\nu) * FT[g(x)](\nu)$$

かけ算のフーリエ変換　フーリエ変換と　フーリエ変換の

？？？🤔

＊は, コンヴォリューション（畳み込み）といいます

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(t-y)dy$$

その意味は, 少し後で…

サンプリングされた関数のフーリエ変換

つまり

$$FT[f_T(x)](\nu) = FT[f(x)](\nu) * FT[\mathrm{comb}_T(x)](\nu)$$

サンプリングされた関数のフーリエ変換は　もとの関数のフーリエ変換と　くし形関数のフーリエ変換の　コンヴォリューション

くし形関数のフーリエ変換は

$$FT[\mathrm{comb}_T(x)](\nu) = \frac{1}{T}\mathrm{comb}_{1/T}(\nu)$$

くし形関数のフーリエ変換はくし形関数, ただし間隔が逆数

くし形関数とのコンヴォリューション

$$\underbrace{FT[f_T(x)](\nu)}_{\text{サンプリングされた関数のフーリエ変換は}} = \underbrace{FT[f(x)](\nu)}_{\text{もとの関数のフーリエ変換と}} * \underbrace{FT[\mathrm{comb}_T(x)](\nu)}_{\text{くし形関数のフーリエ変換の}}$$

コンヴォリューション

「くし形関数とのコンヴォリューション」とは？

「デルタ関数とのコンヴォリューション」を並べたもの

デルタ関数とのコンヴォリューション

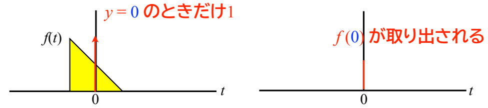
$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta(\underline{t-y})dy$$

デルタ関数はここが0のとき以外はゼロ → 積分してもゼロ

$t=0$のとき $f(t) * \delta(t)|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta(-y)dy$

$y=0$ のとき以外は積分に無関係

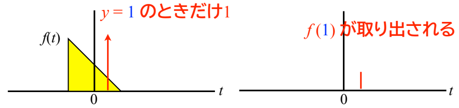
デルタ関数を積分すると
$y=0$ のときだけ1



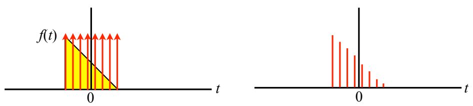
$t=1$のとき $f(t) * \delta(t)|_{t=1} = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta(1-y)dy$

$y=1$ のとき以外は積分に無関係

デルタ関数は積分すると
$y=1$ のときだけ1

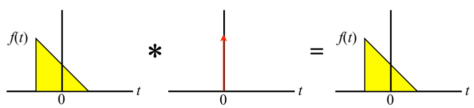


デルタ関数とのコンヴォリューション

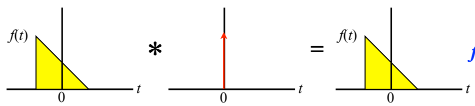


$t=\alpha$ のとき，$f(\alpha)$が取り出される

つまり
$f(x)$ とデルタ関数のコンヴォリューションは，$f(x)$ 自身



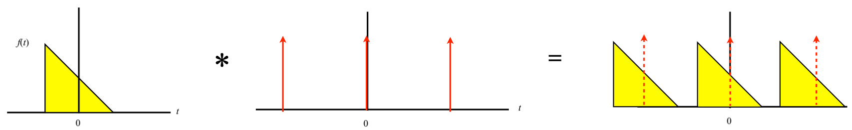
くし形関数とのコンヴォリューション



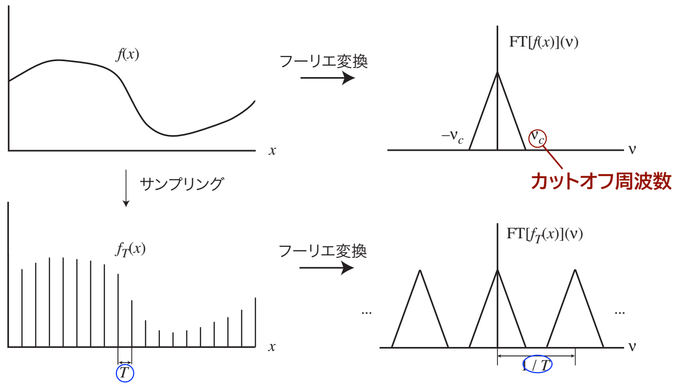
$f(x)$ とデルタ関数のコンヴォリューションは，$f(x)$ 自身

くし形関数は，デルタ関数が等間隔に並んでいる

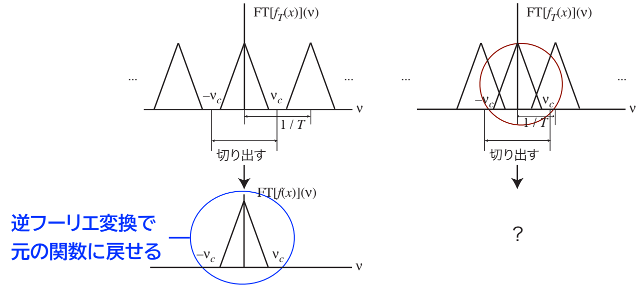
くし形関数とのコンヴォリューションは，元の関数の「コピー」が等間隔に並んだものになる



まとめると・サンプリングとフーリエ変換



周波数空間での間隔



(a) $2\nu_c \le 1 / T$

(b) $2\nu_c > 1 / T$

サンプリング間隔が,
カットオフ周波数に比べて十分に細かければ

サンプリング間隔が粗いと,周波数空間で重なり合ってしまい
元には戻せない（エイリアジング）

まとめ・サンプリング定理

ある関数(画像でも,音声でも)を,それのもつ最大の周波数の2倍以上の細かさでサンプリングしておけば,

サンプリングされたもの(ディジタル画像,ディジタル音声)から
元の関数(画像や音声)を再現できる

例)CDはサンプリング周波数が44.1kHz
→22.05kHzまでの音声が記録できる
（録音時に,それ以上の周波数の成分が入らないようにしなければならない）