2020 年度秋学期　画像情報処理　第６回

第２部・画像情報圧縮／ 準備・「行列」に慣れていない人のために

今日は，「行列」や「ベクトル」の考え方の基本を，高校で習っていない人向けに手短に解説します。

ベクトルと行列の計算

ベクトル

次回（第７回）のテキストでは，「画素が２つしかない画像」を考えて，その画素値 x_1, x_2 を

$$z = a_1 x_1 + a_2 x_2 \tag{1}$$

という式で画素値 z に変換する，という話が出てきます。これを，「ベクトル」の書き方では，次のように書きます。

$$z = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

右辺の左側の () を**行ベクトル**，右側の () を**列ベクトル**といいます。また，この計算はベクトル同士のかけ算の一種で，**内積**といいます。このように数字を () に入れて並べるだけで，上の (1) 式の計算をしたことになります。

問題 1

次のベクトルの計算をしてください。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{3}$$

行列

最初の「画素が２つしかない画像」x_1, x_2 を，別の「画素が２つしかない画像」次に，上の (1) 式のような計算が２組ある場合を考えます。もともとの画素値が x_1, x_2 の２つの組だったので，これを別の２つの画素値の組に，２組の計算で変換する場合にあたります。このとき，それぞれの組を添字 (1) と (2) で区別して，変換後の画素値 $z_{(1)}, z_{(2)}$ を求める計算を，ベクトルで表すと

$$\begin{aligned} z_{(1)} &= \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ z_{(2)} &= \begin{pmatrix} a_{1(2)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4}$$

となります[1]。この２つの式をひとつにまとめて，次のように書きます。

$$\begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} \\ a_{1(2)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

この式の右辺にある，数の４つ入った () を**行列**といい，右辺の計算を「行列とベクトルのかけ算」といいます。行ベクトルが列になって並んでいるので，行列とよぶわけです。

[1] ふつうは，添字にこのようなカッコはつけず，a_{11}, a_{21} のように書きます。ここでは，添え字の意味をわかりやすくするために，このようにカッコをつけて書いています。

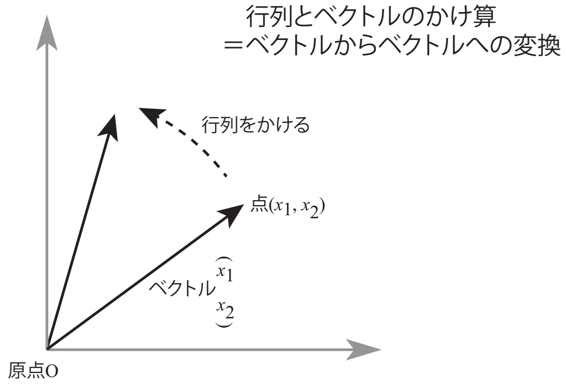

図 1: 行列とベクトルのかけ算.

問題 2

次の行列とベクトルの計算をしてください。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

行列，ベクトルと座標平面

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を座標平面でのある点と考えると，(5) 式の計算は，$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ という点を $\begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \end{pmatrix}$ という点に移動する計算を表す，ということもできます。また，このときベクトルという言葉を使うと，「$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ は原点から点 (x_1, x_2) をさすベクトル（位置ベクトル）である」といいます。図形的には，原点から点 (x_1, x_2) まで伸びた矢印を想像すればよいでしょう。この言い方をすると，行列とベクトルのかけ算は，ベクトルをベクトルに変換する計算ということができます（図 1）。

問題 3

問題 2 のベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ と，問題 2 の計算結果のベクトルを，座標平面に図示してください。

行列と行列のかけ算

次回（第 7 回）のテキストには，

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

という形の式も出てきます。ここで，右辺の λ は普通の数（スカラー）で，このとき右辺は $\begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}$ を表します。

次回のテキストでは，この式を満たす a_1, a_2 は 2 組あるので，λ もそれぞれに対応して 2 つある，と

いう話になっています。それらを $\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}$ と表すと，それぞれに対応する式は

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix} = \lambda_{(1)} \begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix} = \lambda_{(2)} \begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix} \tag{9}$$

と表されます。

では，今度はこれらの 2 つの式を，ひとつにまとめて表してみましょう。列ベクトル $\begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix}$ を左右にくっつけて，$\begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix}$ と，ひとつの行列で表します。すると，(8) 式，(9) 式の 2 つの式は，まとめて

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} \end{pmatrix} \tag{10}$$

と表すことができます。このように，2 つの「行列とベクトルのかけ算」をひとつの式に書いたのが，「行列と行列のかけ算」です。

本当にそうなっていることを確かめてみましょう。(10) 式の左辺は，上で述べたとおり，

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix} \right)$$

のように列ベクトルを左右にくっつけたものです。

一方，(10) 式の右辺も，右側の行列を列ベクトルに分けて

$$\begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \lambda_{(1)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{(2)} \end{pmatrix} \right)$$

と表すと，左側の行列 $\begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix}$ と右側の行列の左側の列ベクトル $\begin{pmatrix} \lambda_{(1)} \\ 0 \end{pmatrix}$ の積は

$$\begin{pmatrix} \lambda_{(1)} a_{1(1)} + 0 \cdot a_{1(2)} \\ \lambda_{(1)} a_{2(1)} + 0 \cdot a_{2(2)} \end{pmatrix} \text{ すなわち } \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} a_{1(1)} \\ \lambda_{(1)} a_{2(1)} \end{pmatrix} = \lambda_{(1)} \begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix}$$

となります。右側の列ベクトルについても同様です。このように，（行列×列ベクトル）のかけ算を 2 つ同時に行うのが，行列のかけ算です。

問題 4

次の行列と行列の計算をしてください。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

要素が p 個あるベクトルの場合

ここまでは,「画素が 2 つしかない画像」を考えたところから出発して,2 つの要素からなるベクトルについての計算を考えてきました。では,「要素が p 個あるベクトル」の場合を考えてみましょう。

(8) 式,(9) 式の形の式を,要素が p 個の場合に表すと,

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} \tag{12}$$

となります。また,(10) 式を,要素が p 個のベクトルの場合に表すと,

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & & & 0 \\ & \lambda_{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{(p)} \end{pmatrix} \tag{13}$$

となります。

こんな式は,大変複雑でとても扱いきれません。また,要素が p 個ある場合は,ベクトルも p 次元空間での「矢印」になり,2 次元の場合のように図形的に考えることもできません。

そこで,(13) 式の各行列をそれぞれひとつの文字で表して,

$$SP = P\Lambda \tag{14}$$

と表してしまいます。こうしてしまうと,2 次元でも p 次元でも変わりはありません。このように,**複雑な計算をあたかも数の計算のように表して,単純な形で理解しようというのが,行列というものが考えられた理由**です。

ただし,行列のかけ算では,積 AB と積 BA は同じとは限りません。すなわち,数のかけ算とは違って,かける順番が問題になります。

転置行列と対称行列

転置行列とは,ある行列の行と列を入れ替えたもので,例えば行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の転置行列は $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ です。行列 A の転置行列を,${}^tA, A^t, A^T, A'$ などと表します。今回の講義のプリントでは最後の A' を使っていますが,これは統計学の教科書に多い方式です。さらに,ある行列とその転置行列が同じとき,その行列を**対称行列**といいます。

問題 5

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の転置行列を求めてください。

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は,それぞれは対称行列ですか。

逆行列と単位行列

さきほど「行列と行列のかけ算」を説明しましたが，行列には「割り算」はありません。そのかわりにあるのが**逆行列**です。

数の割り算で，例えば「2 で割る」という計算は，「$\dfrac{1}{2}$ をかける」のと同じです。この 2 つの数字は，$2 \times \dfrac{1}{2} = 1$ で，「かけると 1」という関係になっています。この "1" は，「かけても何もおこらない数」で，単位元といいます。

これと同じように，「かけても何もおこらない行列」を考えます。これを**単位行列**といい，I で表します。つまり，単位行列 I は，どんな行列 X に対しても $XI = IX = X$ となる行列のことです。そして，行列の A の逆行列 A^{-1} とは，$AA^{-1} = A^{-1}A = I$ となる行列のことで，「かけると I」という関係になっています。つまり，逆行列 A^{-1} をかけることが，あたかも「行列 A で割る」のと同じような計算になっています。例えば，行列の積 XA に右から A^{-1} をかけると $XAA^{-1} = X$ となり，「A で割った」のと同じことになっているのがわかります。

また，(14) 式の $SP = P\Lambda$ という関係は，逆行列を使うと

$$P^{-1}SP = \Lambda \tag{15}$$

とも表されます。

単位行列の中身は，左上から右下に向かう対角線上の数（対角成分）がすべて 1，他はすべて 0 になります。2 次元の場合，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が単位行列です。

直交行列

直交行列とは，逆行列が転置行列と同じであるような行列です。つまり，行列 R が

$$R'R = RR' = I \tag{16}$$

のとき，R は直交行列です。

「直交行列」という名前は，直交行列に含まれる各列ベクトルが互いに直交していて，いずれも大きさが 1 であることをさしています。このことを，各列ベクトルが**正規直交基底**をなす，といいます。なお，「2 つのベクトルが直交している」とは，図形的にはまさに「直角に交わる」ことですが，定義としては「それらの内積が 0 である」ことをいいます。

もともと直交している 2 つのベクトルを直交行列で変換すると，それぞれを変換したベクトルもやはり直交しています。図形的には，直交座標の座標軸を直交したまま回転する計算は，直交行列をかける計算で表されます（図 2）。

問題 6

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

が直交行列であることを確かめてください。

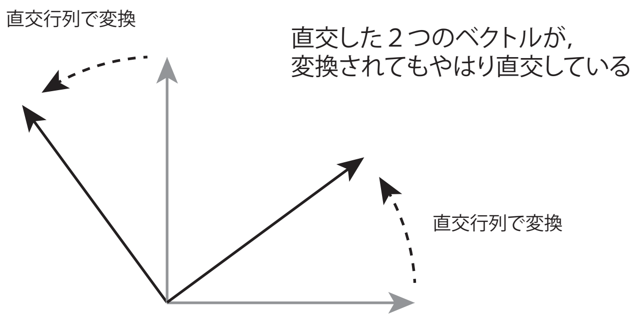

図 2: 直交行列によるベクトルの変換.

問題 7

1. ベクトル $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ と $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ が直交していることを，図に描いて確認してください。

2. 座標軸の x 軸はベクトル $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ で，y 軸はベクトル $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ で，それぞれ表されます。これらのベクトルを直交行列 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}$ で変換して，変換後のベクトルも直交していることを図で確認してください。