2020年度秋学期 画像情報処理　第6回

「行列」に慣れていない人のために

（第2部「画像情報圧縮」の準備）

浅野 晃
関西大学総合情報学部

ベクトルと行列の考え方

たくさんの数の組を，ひとまとめに計算する

ひとつの組がいくつの数でできていても，
同じように計算できるようにする

組の中身を意識せずにすむことによって，
さらに複雑な計算を考えることができる
（現代のプログラミングも同じ考えかた）

ベクトルの計算

$z = a_1 x_1 + a_2 x_2$　この計算を

$$z = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$ と書く

行ベクトル

列ベクトル

問題1

問題 1

次のベクトルの計算をしてください。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Pause

問題1

問題 1

次のベクトルの計算をしてください。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

（解答例）

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \times 3 + 2 \times 4 = 3 + 8 = 11$$

■

ベクトルの計算が2つ

$$z_{(1)} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$z_{(2)} = \begin{pmatrix} a_{1(2)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

この計算をまとめて

$$\begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} \\ a_{1(2)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

と書く

行列

問題2

問題 2

次の行列とベクトルの計算をしてください。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pause

問題2

問題 2

次の行列とベクトルの計算をしてください。

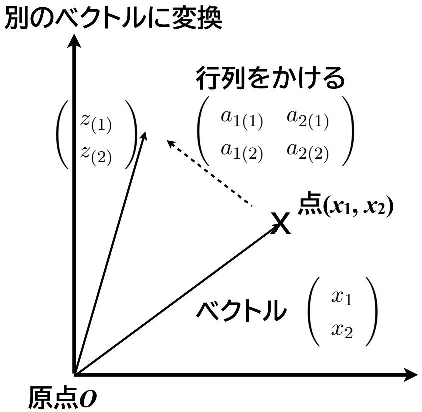
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

（解答例）

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times 2 + 1 \times 1 \\ 1 \times 2 + 2 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

■

図形的意味



問題3

問題 3

問題 2 のベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ と，問題 2 の計算結果のベクトルを，座標平面に図示してください。

Pause

問題3

問題 3

問題 2 のベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ と，問題 2 の計算結果のベクトルを，座標平面に図示してください。

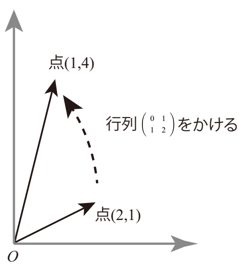


図 2: 問題 3 の解答例.

定数倍の計算

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \boxed{\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}}$$ の意味

行列と行列の計算

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix} = \lambda_{(1)} \begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix} = \lambda_{(2)} \begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix}$$

この計算をまとめて

$\lambda_{(1)}$に関する計算

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} \end{pmatrix}$$

行列とベクトルの計算が2つ

問題4

問題 4

次の行列と行列の計算をしてください。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pause

問題4

問題 4

次の行列と行列の計算をしてください。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

（解答例）右側の行列を，$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の 2 つのベクトルに分けます。

ひとつめのベクトルに対しては

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times 2 + 1 \times 1 \\ 1 \times 2 + 2 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

問題4

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となり，ふたつめのベクトルに対しては

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times 1 + 1 \times 0 \\ 1 \times 1 + 2 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となります。よって，これらの 2 つのベクトルを並べて

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

となります。■

要素がp個の場合

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

は,

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$$

要素がp個の場合

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} \end{pmatrix}$$

は,

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & & & 0 \\ & \lambda_{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{(p)} \end{pmatrix}$$

なんのために？？？

行列を1文字で表す

$$\underbrace{\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{pmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix}}_{P}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & & & 0 \\ & \lambda_{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{(p)} \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$SP = P\Lambda$$

複雑な計算を，あたかも数の
計算のように単純に考える

ただし

行列の積は，交換ができない
ABとBAが等しいとは限らない

転置行列・対称行列

行列A $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ 転置行列 ${}^tA, A^t, A^T, A'$

ある行列とその転置行列が同じとき，対称行列という

問題5

問題 5

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の転置行列を求めてください。
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は，それぞれは対称行列ですか。

Pause

問題5

（解答例）

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ です。
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の転置行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ で，もとの行列とは異なるので，対称行列ではありません。一方，
   $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の転置行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で，もとの行列と同じなので，これは対称行列です。■

逆行列

行列には割り算はない

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

単位行列
（かけ算をしても何もおこらない）

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

となるA^{-1}を，Aの逆行列という

数の場合は

$$a \times \frac{1}{a}\text{（逆元）} = 1\text{（単位元）}$$

行列の場合は

$$AA^{-1}\text{（逆行列）} = I\text{（単位行列）}$$

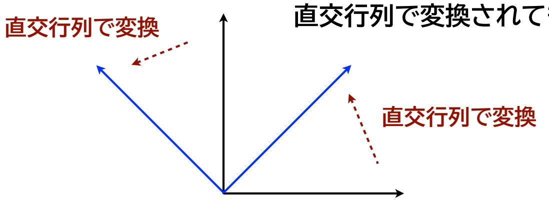
直交行列

逆行列が転置行列と同じであるような行列を直交行列という

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} b \\ d \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

直交行列の列ベクトルどうしは直交している
ベクトルの「直交」の定義は「内積が0」

直交した2つのベクトルは，
直交行列で変換されても直交している



問題6

問題 6

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

が直交行列であることを確かめてください。

Pause ⏸

問題6

（解答例）次のとおりです。

$$R'R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \times 1 + (-1) \times (-1) & 1 \times 1 + (-1) \times 1 \\ 1 \times 1 + 1 \times (-1) & 1 \times 1 + 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$RR' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 1 & (-1) \times 1 + 1 \times 1 \\ 1 \times (-1) + 1 \times 1 & (-1) \times (-1) + 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

■

問題7

問題 7

1. ベクトル $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が直交していることを，図に描いて確認してください。
2. 座標軸の x 軸はベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で，y 軸はベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で，それぞれ表されます。これらのベクトルを直交行列 $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ で変換して，変換後のベクトルも直交していることを図で確認してください。

Pause ⏸

問題7

（解答例）　1. 図 4 のとおりで，この 2 つのベクトルは直交しています。

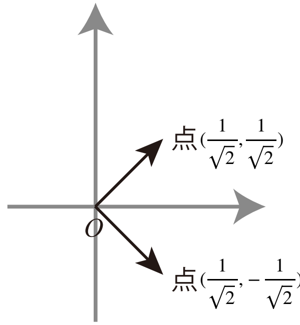


図 4: 問題 7-1.

問題7

2. x 軸をこの行列で変換すると

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

で，y 軸をこの行列で変換すると

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

です。つまり，この行列の 2 つの列ベクトルがそのまま取り出されます（上で出てきた「単位行列」を思い出してください）。したがって，図 5 のように，x, y 軸が，直交したまま 45 度回転したものに変換されたということができます。■

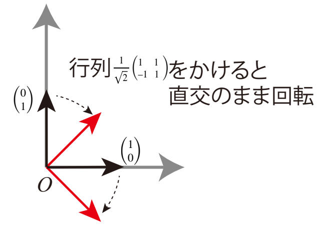


図 5: 問題 7-2.

第2部の本題へ

第2部は画像データ圧縮

画像を，各画像で大きく異なる部分と
どの画像でもあまりかわらない部分にわける

どの画像でもあまり変わらない部分　なんて，ある？

直交変換すると，
「大まかな部分」「細かい部分」が別に
なるように組み替えられる

どの画像でもあまりかわらない部分は，ごまかす

フーリエ変換も，行列で表すと直交変換の一種