


2020年度秋学期 画像情報処理 第7回
主成分分析とKarhunen-Loève変換

浅野 晃
関西大学総合情報学部



画像情報圧縮

画像情報圧縮の必要性



この画像では、1画素の明るさを0~255の整数で表す
1画素に、2進数8桁 = 8ビット = 1バイト必要
500万画素のデジカメの画像は、約5メガバイト必要



こういう画像は、1画素 = 16ビットで、2倍の10メガバイト
必要なこともある

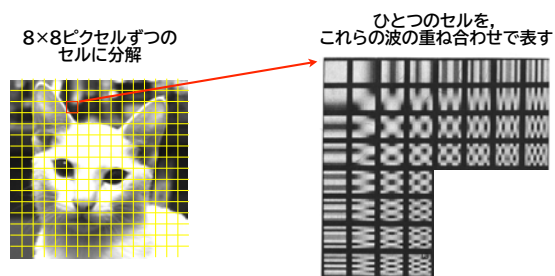


カラー画像ならば、3倍の15メガバイト必要

動画ならば、(1/30)秒でこれだけのデータ量！

JPEG方式による画像圧縮

画像を波の重ね合わせで表わし、一部を省略して、データ量を減らす



細かい部分は、どの画像でも大してかわらないから、省略しても気づかない

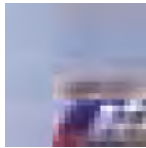
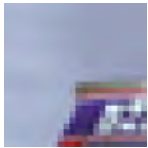
省略すると、データ量が減る

画像情報圧縮の例

データ量:80KB



データ量:16KB



(8×8ピクセルのセルが見える)

ところで、本当に「波」でいいんですか？

まあ、結局「波」でいいんですけどね…

もっと根本的な原理から説明します。

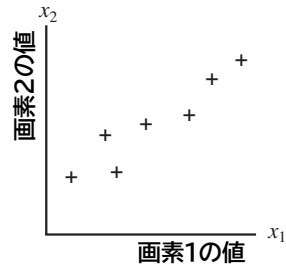
「主成分分析」と「直交変換」

主成分分析

重要な成分と、そうでない成分

しばらく、**画素が2つしかない画像**を考える

たくさんの2画素画像を考える

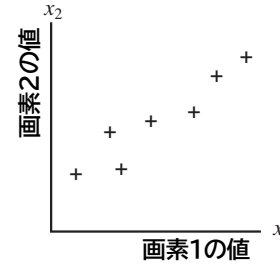


ひとつの2画素画像は、
この図の1つの点で表される

(散布図という)

どちらかの画素値を省略できるか？

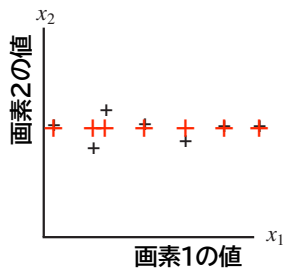
たくさんの2画素画像が
こんなふうに散らばって(分布して)いたら



各画像の違いを表現するには、
どちらの画素も省略することはできない

どちらの画素値の分散も大きい

こんな分布なら



画素2の値は、どの画像でもあまり変わらない
(分散が小さい)

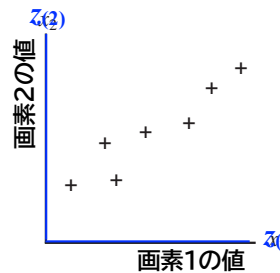
各画像の違いを表現するのに、
画素2はそれほど必要ない

画素2の値は、それらの平均に置きかえてしまってもそれほど変わらない

画素2の値はいちいち記録しなくてもいいから、データ量が半分に減る

そういう都合のいい分布に変換できないの？

散布図上である方向に広がっているなら
(x_1, x_2 に相関があるなら)できます。こうすればいい



x_1, x_2 を回転して、新たに $z(1), z(2)$ とすればよい

$z(1)$ の分散がもっとも大きくなるように回転する

このとき $z(1)$ と $z(2)$ の相関がなくなる

これをするのが**主成分分析**

主成分分析

x_1, x_2 から次の式で z を求めるものとし、
 z の分散 $V(z)$ が最大になる a_1, a_2 を求める

$$z = a_1x_1 + a_2x_2$$

$V(z)$ を求めるために、次の量を用いる

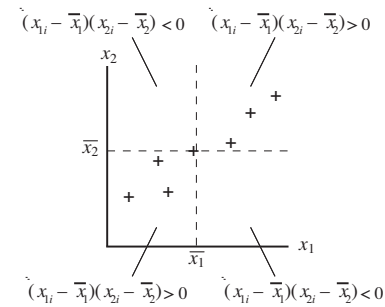
x_{1i}, x_{2i} n 枚中の i 番目の画像の、 x_1, x_2 の値

\bar{x}_1, \bar{x}_2 x_1, x_2 の全画像にわたる平均

s_{11}, s_{22} : x_1, x_2 の分散

さらに共分散も用いる

$$s_{12} = s_{21} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2) \quad x_1, x_2 \text{の共分散}$$



共分散の正負 = 相関の正負

(共分散を x_1, x_2 の標準偏差で割ったものが相関係数)

さて、 z の分散 $V(z)$ は

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2 \\ &= a_1^2 s_{11} + 2a_1 a_2 s_{12} + a_2^2 s_{22} \quad (3) \text{式} \end{aligned}$$

$V(z)$ が最大になる a_1, a_2 を求める

x から z への変換は「回転」(伸び縮みしない) $\rightarrow a_1^2 + a_2^2 = 1$

固有値問題

定数 λ を使って

$$\begin{aligned} a_1 s_{11} + a_2 s_{12} &= a_1 \lambda \\ a_2 s_{22} + a_1 s_{12} &= a_2 \lambda \end{aligned} \quad \text{が得られる(付録1)}$$

行列で書くと

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

分散共分散行列 固有ベクトル 固有値

固有値・固有ベクトルを求める問題を「固有値問題」という(解き方は略)

第1主成分

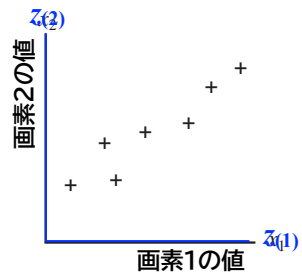
固有ベクトル $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ が2組得られて、しかも $V(z) = \lambda$ となる
固有値 λ (付録2)

大きい方の λ ($\lambda_{(1)}$ とする) に対応する固有ベクトル $\begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix}$ を使って
求めた z ($z_{(1)}$ とする) が、求めたかった z

第1主成分という

主成分分析と直交変換

このとき $z(1)$ と $z(2)$ は無相関



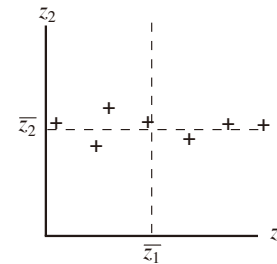
x_1, x_2 を回転して、新たに $z(1), z(2)$ とする

$z(1)$ の分散がもっとも大きくなるように回転する

$z(1), z(2)$ は無相関。
なぜなら

相関がないときは

相関がない $\rightarrow (z_{1i} - \bar{z}_1)(z_{2i} - \bar{z}_2)$ の正負がわりあう



共分散 = 0

先ほど求めた
 $z(1), z(2)$ はこうなっている
 \rightarrow 本当?

主成分分析と分散共分散行列

固有値のうち、大きい方を $\lambda_{(1)}$, 小さい方を $\lambda_{(2)}$

対応する固有ベクトル $\begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix}$

これらは

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix} = \lambda_{(1)} \begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix} = \lambda_{(2)} \begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix} \text{ をみたく}$$

分散共分散行列の対角化

まとめると

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} \end{pmatrix}$$

つまり $SP = P\Lambda$

すなわち $\Lambda = P^{-1}SP$, $S = P\Lambda P^{-1}$

(分散共分散行列の)対角化という

対称行列の対角化

分散共分散行列 S は $\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$ $s_{12} = s_{21}$ 対称行列 共分散

対称行列の固有ベクトルは直交する(詳細略)

P は直交行列 $\begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix}$

直交行列の逆行列は転置行列(逆回転)

すなわち $S = P\Lambda P'$

対角化の意味

$$S = P\Lambda P'$$

P' で変換し

分散共分散行列は

そこでは分散共分散行列が Λ で

P で戻る

「この世」

「あの世」

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} \end{pmatrix} \text{ あの世では共分散が0} \\ \rightarrow \text{ 関係がない}$$

P' で変換された「あの世」とは？

$$z_{(1)} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

だから

$$z_{(2)} = \begin{pmatrix} a_{1(2)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

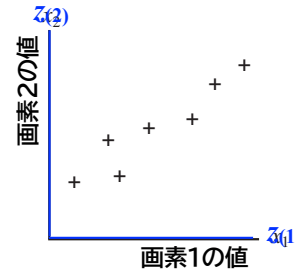
これが P'

$$\begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} \\ a_{1(2)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

直交行列で変換するから
直交変換という

つまり, x から z に変換すると,
z₍₁₎ と z₍₂₎ の共分散が 0 → 相関がない

たしかに z(1) と z(2) は無相関



x₁, x₂ を回転して, 新たに z₍₁₎, z₍₂₎ とする

z₍₁₎ の分散がもっとも大きくなるように回転する

このときたしかに
z₍₁₎, z₍₂₎ は無相関

画素が p 個あっても同じ

x から z への, P' による直交変換

$$\begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \\ \vdots \\ z_{(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} & \cdots & a_{p(1)} \\ a_{1(2)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{p(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1(p)} & a_{2(p)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = P' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

P は固有値問題の解

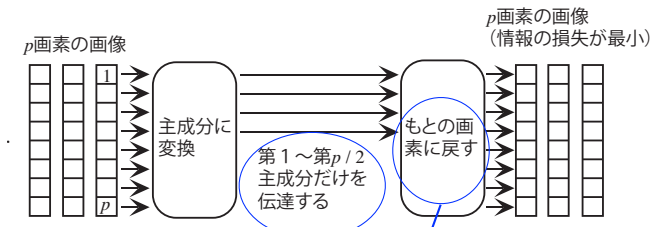
分散共分散行列 S

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$$

$$S \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & & & 0 \\ & \lambda_{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{(p)} \end{pmatrix}$$

Karhunen-Loève 変換 (KL 変換)

画像を主成分に変換してから伝送する



データ量が半分でも
情報の損失は最小

もどすときは,

Karhunen-Loève変換(KL変換)

もどすときは

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \simeq (P')^{-1} \begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \\ \vdots \\ z_{(p/2)} \\ \overline{z_{(p/2+1)}} \\ \vdots \\ z_{(p)} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \\ \vdots \\ z_{(p/2)} \\ \overline{z_{(p/2+1)}} \\ \vdots \\ z_{(p)} \end{pmatrix}$$

伝送されて来なかった主成分は、
平均に置き換えておく

KL変換の大問題

主成分を求めるには、分散共分散行列が必要

分散共分散行列を求めるには、
「いまから取り扱うすべての画像」が
事前にわかっていないといけない

そんなことは不可能。

続きは

分散共分散行列がわからないから、
どういう直交変換をしたらいいかもわからない

経験的にうまくいく直交変換を行う

画像をベクトルではなく、2次元のまま行列で表して
「行列の直交変換」を考え、
直交変換のようすが目に見えるようにする。

適切な直交変換を選ぶ (実は結局フーリエ変換とその変形)