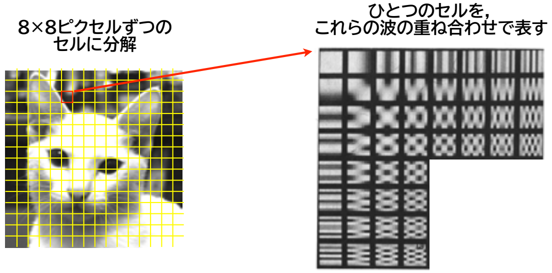
行列の直交変換と基底画像

浅野 晃
関西大学総合情報学部

JPEG方式による画像圧縮

画像を波の重ね合わせで表わし，一部を省略して，データ量を減らす

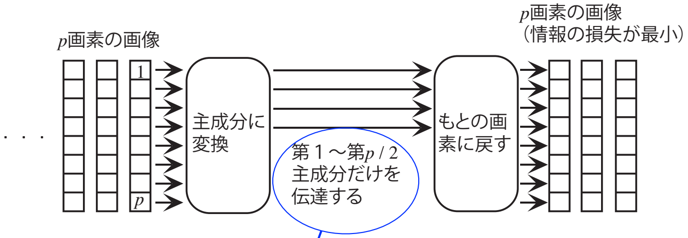


細かい部分は，どの画像でも大してかわらないから，省略しても気づかない

省略すると，データ量が減る

Karhunen-Loève変換（KL変換）

画像を主成分に変換してから伝送する



データ量が半分でも
情報の損失は最小

KL変換の大問題

主成分を求めるには，分散共分散行列が必要

分散共分散行列を求めるには，
「いまから取り扱うすべての画像」が
事前にわかっていないといけない

そんなことは不可能

じゃあ, 主成分を求めるのはあきらめて,
どういう直交変換をするか「直観的」に🤔

画像をベクトルにしてしまったら,
直観がはたらかない…

行列の直交変換💡

画像を行列であらわす

平面のものを素直に表せばいいだけのことですが,
前回はベクトルで考えていたので。

$$z = P'x$$

変換後の画像を表すベクトル（m^2要素）

原画像を表すベクトル（m^2要素）

直交変換を表す行列（$m^2 \times m^2$）

ベクトルから行列に書き換える（戻す）ことを考える

ベクトルを行列に書き換える

m^2要素ベクトル

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \begin{array}{l} m\text{要素} \\ \\ m\text{要素} \\ \\ m\text{要素} \end{array}$$

$m \times m$行列

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_j & \cdots & x_m \end{pmatrix}$$

m要素 m要素 m要素

zも同じ

直交変換行列P'は？

P' がこういう形になっているのなら

$$P' = \begin{pmatrix} r_{11}c_{11} & \cdots & r_{11}c_{1m} & & r_{1m}c_{11} & \cdots & r_{1m}c_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{11}c_{m1} & \cdots & r_{11}c_{mm} & & r_{1m}c_{m1} & \cdots & r_{1m}c_{mm} \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ r_{m1}c_{11} & \cdots & r_{m1}c_{1m} & & r_{mm}c_{11} & \cdots & r_{mm}c_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1}c_{m1} & \cdots & r_{m1}c_{mm} & & r_{mm}c_{m1} & \cdots & r_{mm}c_{mm} \end{pmatrix}$$

こういう形ってどういう形？

行列のKronecker積

$$P' = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} r_{11}c_{11} & \cdots & r_{11}c_{1m} \\ \vdots & r_{11}\times C & \vdots \\ r_{11}c_{m1} & \cdots & r_{11}c_{mm} \end{matrix}} & \cdots & \boxed{\begin{matrix} r_{1m}c_{11} & \cdots & r_{1m}c_{1m} \\ \vdots & r_{1m}\times C & \vdots \\ r_{1m}c_{m1} & \cdots & r_{1m}c_{mm} \end{matrix}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{\begin{matrix} r_{m1}c_{11} & \cdots & r_{m1}c_{1m} \\ \vdots & r_{m1}\times C & \vdots \\ r_{m1}c_{m1} & \cdots & r_{m1}c_{mm} \end{matrix}} & \cdots & \boxed{\begin{matrix} r_{mm}c_{11} & \cdots & r_{mm}c_{1m} \\ \vdots & r_{mm}\times C & \vdots \\ r_{mm}c_{m1} & \cdots & r_{mm}c_{mm} \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mm} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & \cdots & r_{mm} \end{pmatrix}$$

こうなっているのなら

Rの各要素に
Cを貼付けたもの

$$P' = R \otimes C$$ Kronecker積

行列の変換に書き換える

$$z = P'x$$

ベクトルxから
ベクトルzへの
行列P'による変換

証明は…ひたすら計算💦(付録1)

$$Z = CXR'$$

行列Xから
行列Zへの
行列CとR'による変換

分離可能性

$CXR' =$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{1m} & \cdots & r_{mm} \end{pmatrix}$$

***C*はXの列に作用**　　　***R*はXの行に作用**

縦方向と横方向の作用を分離できることを，
分離可能(separable)という

行列の直交変換とユニタリー変換

縦横の作用を区別する必要はない場合，$C=R$とする

$$Z = RXR' \quad X = R'ZR$$

ただし $RR'=I$　　行列Xの行列Rによる直交変換

*は複素共役（ i を$(-i)$にかえる）

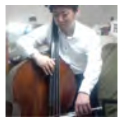
要素が複素数の場合は，R'のかわりに R'^*を用いる

行列Xの行列Rによるユニタリー変換

ちょっと余談ですが☕

縦横の作用を区別する必要はないのか？

画像処理としてはその仮定はおかしくないが，
現実世界においては，重力があるので，左右と上下は異なる

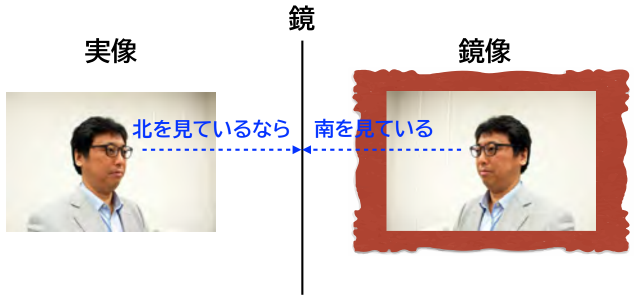




上下反転のほうが違和感が大きい

だから

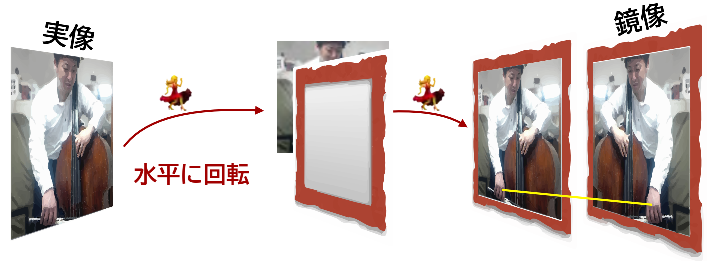
鏡ではなぜ左右だけ逆になるのか？

鏡で逆になっているのは，左右でも上下でもなく　前後。



鏡ではなぜ左右だけ逆になるのか？

「鏡で逆になる」というなら，「正解」はなにか？



🐻💭 正解はこれしかないでしょう？

左右が反転
上下はそのまま

鏡ではなぜ左右だけ逆になるのか？

👨‍🎓💬 いいえ，正解はそれだけではありません

水平回転が正しいと思うのは
重力の都合でしかない

上下が反転
左右はそのまま

基底画像🤔

基底画像

$$Z = RXR'$$

どういう$\boldsymbol{R}$を用いれば,
最適に画像データを圧縮できるか？

それは, 依然わからない

しかし, 画像をベクトルでなく行列で表したことで,
直交変換の効果がヴィジュアルにわかる

基底画像

変換後の画像Zのm^2個の要素を, それぞれ行列に分ける

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & z_{12} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & z_{mm} \end{pmatrix}$$

$X = R'ZR$ を, 上の各行列で行う。たとえば

$$\begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{1m} & \cdots & r_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & \cdots & r_{mm} \end{pmatrix}$$

基底画像

r_{11}が残る　かけ算　かけ算　r_{11}が残る

$$\begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{1m} & \cdots & r_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & \cdots & r_{mm} \end{pmatrix}$$

この列が残る　この行が残る

$$\begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{1m} & \cdots & r_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & \cdots & r_{mm} \end{pmatrix}$$

ベクトルの直積
（付録3）

$$z_{11} \begin{pmatrix} r_{11} \\ \vdots \\ r_{1m} \end{pmatrix} (r_{11} \cdots r_{1m}) = z_{11} \begin{pmatrix} r_{11}r_{11} & r_{11}r_{12} & \cdots & r_{11}r_{1m} \\ r_{12}r_{11} & r_{12}r_{12} & \cdots & r_{12}r_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{1m}r_{11} & r_{1m}r_{12} & \cdots & r_{1m}r_{1m} \end{pmatrix}$$

行列すなわち画像

基底画像

つまり

$$X = z_{11}\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_1' + z_{12}\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2' + \cdots + z_{mm}\boldsymbol{r}_m\boldsymbol{r}_m'$$

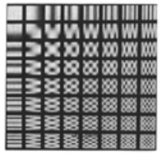
基底画像

原画像Xは, m^2個の基底画像に
それぞれZの各要素をかけて足し合わせたものになっている

つづきは

原画像Xは，m^2個の基底画像に
それぞれZの各要素をかけて足し合わせたものになっている

つまり，今日の最初にでてきた
これ(の8×8の1つ1つ)が基底画像です



元の関数は，いろいろな周波数の波に，
各々対応するフーリエ係数をかけて足し合わせたものになっている…

第1部の
これと同じ？

つづきは

原画像Xは，m^2個の基底画像に
それぞれZの各要素をかけて足し合わせたものになっている

元の関数は，いろいろな周波数の波に，
各々対応するフーリエ係数をかけて足し合わせた
ものになっている…

つまり，逆フーリエ変換？

フーリエ変換も，ユニタリー変換の一種

フーリエ変換を基本に，
画像圧縮に適した基底画像(一部を省略しても影響が少ない基底画像)を選ぶ