2020年度秋学期 統計学　第9回

確からしさを記述する — 確率

浅野 晃
関西大学総合情報学部

「確率」って，よく聞くけれど🤔

※「確立」という書き間違いを見ると，かなりがっかりします😞

※中国語では「概率」あるいは「機率」というそうです

「降水確率40%」って？

何の割合が40%？

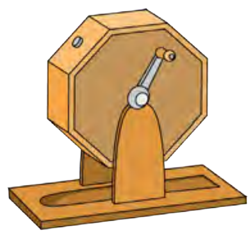
機会
現在と同じ気象状況が
これから何度も何度も起きるとすると
そのうち40%の場合で雨になる

機会のうちの雨の割合が40%

可能性の集合

くじびき

※この機械は「新井式廻轉抽籤器」というそうです（リンク参照）



https://illpop.com/png_season/dec01_a07.htm

↓くじをひくと

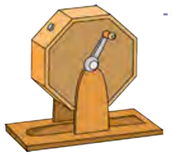
当たった！

現実に起きたのは，
これだけ

他のことは起きていない

可能性の集合

しかし



当たった

他の可能性もあった

はずれ　当たり　はずれ

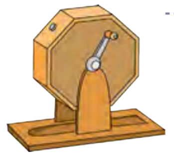
こうなるかも知れなかった

「偶然」(人知が及ばない)

［ランダム現象］という

可能性の集合

現実 | 可能性



当たった

はずれ　当たり　はずれ

可能性のうち
どの結果になりやすいか？

を，数値で表せないか？
(ギャンブラーの数学)

「確率」の定義

頻度による確率の定義

あるできごとがおきる確率は，
［事象］ event

そのできごとがおきる可能性のある，十分多くの機会があるとき，
［試行］ trial

それらの機会のうち，そのできごとがおきる機会の数の割合

くじを十分多くの回数ひくとき，10回中3回の割合で当たるなら，確率0.3

※確率は「割合」なので，「大きい・小さい」と表現します。
「高い・低い」なのは「可能性」です。

頻度による確率の定義

あるできごとがおきる確率は，

そのできごとがおきる可能性のある
十分多くの機会があるとき，

ダウト（1）　　ダウト（2）

それらの機会のうち
そのできごとがおきる機会の数の割合

確率の定義・ダウト（1）

「十分多くの機会」？

数学でいう「十分多く」とは，

だれかが「十分ではない」といったら，
それに応じていくらでも多くすること
ことができる，　ということ

現実には無理😵

確率の定義・ダウト（2）

機会が「ある」とき？

機会が「あった」ではない

つまり，未来におきるできごとの話をしている。

未来のことはわからない。

確率を定義はしたけれど

定義することと，測ることとは別

1メートルの定義は？

※元の由来は「地球の北極から赤道までの子午線長の1000万分の1」
※現在は，「光が真空中を 299 792 458 分の1秒の間に進む距離」（「秒」の定義は略）

1キログラムの定義は？

※元の由来は「10cm立方の水の質量」
※長らく，定義は「国際キログラム原器の質量」とされてきた
※2019年5月20日以降は，プランク定数（光の振動数と光子1個のエネルギーを関係づける定数）を$6.626\,070\,15\times10^{-34}$（J･s）と定め，「そうなるような質量の単位」がキログラムとされている

確率は測定できないけれど

「十分多くの機会」は現実には無理

未来のことはわからない

でも

過去を未来に延長できると考える　　（「自然の斉一性」）

十分多くは無理でも，
「そこそこ多く」の機会があれば
そこそこの精度で確率を推定できる　　［大数の法則］

というわけで確率は

「十分多くの機会」に関する話を，次の1回の機会にあてはめている

ギャンブラーは，
日常的に賭けをしているから，
確率の大きなできごとを見抜いて賭ければ，
全体として勝つことができる

どんな名ギャンブラーでも，1回の賭けに
必ず勝つことはできない

もうひとつの確率の定義🤔

さいころで1が出る確率

なぜ1/6なのか？

$$\frac{\text{「1」は1通り}}{\text{1, 2, 3, 4, 5, 6の6通り}} = 1/6$$

確率の［ラプラスの定義］という

さっきの「頻度による定義」とは違う…

ラプラスの定義の意味

$$\frac{\text{「1」は1通り}\quad (n\text{回})}{1, 2, 3, 4, 5, 6\text{の6通り}\quad (n\text{回}\ n\ n\ n\ n\ n)} = 1/6 \quad = n/(6n)$$

1〜6が皆同じ確率で出る，と認めるなら，
「同様に確からしい」equally likely

さいころを6n回ふる。（nは十分大きい）

nが十分大きければ，1〜6は同じ回数出る（頻度による定義）

ラプラスの定義の意味

1〜6が皆同じ確率で出る，と認めるなら
「同様に確からしい」

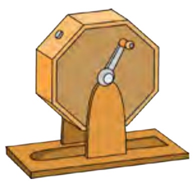
正しいと証明する方法はない

このさいころは偏っていないだろうという
「信頼」によって認めているだけ

条件付き確率と独立🤔

統計学でいう「独立」とは

2つのランダム現象がおきるとき，一方の結果がもう一方に影響しない



2度続けてひくとき，

1度めで出た玉を戻さなければ，独立でない

1度めで当たりが出ると，
2度めは当たりが減っている

正確には[条件付き確率]を使って定義する

条件付き確率

「雨が降る確率」

「雨の予報が出ているときに雨が降る確率」 ← ふつう，こちらの方が大きい

条件付き確率とは,

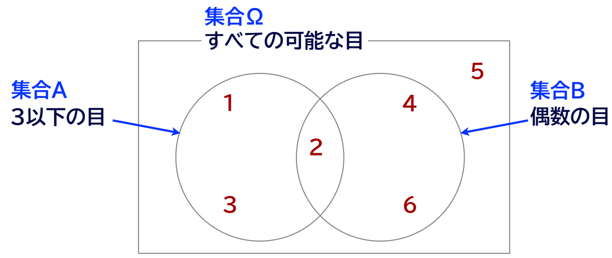
何かがおきたときに
何かがおきるとわかったときに　　別のことがおきる確率
何かがおきるのが確実なときに

「何か」がおきることの影響を受けることがある
(「何か」と「別のこと」に因果関係がなくても)

さいころの例で

集合を表す「ベン図」を使って考える

さいころの「可能な目」は, 1,2,3,4,5,6

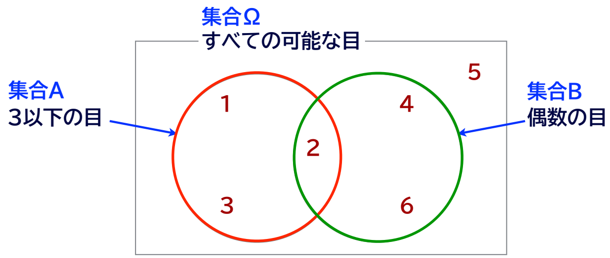


集合と確率

集合Xの要素の数を|X|で表す

「3以下の目が出る確率」
|A|/|Ω| = 3/6　P(A)で表す

「偶数の目が出る確率」
|B|/|Ω| = 3/6　P(B)で表す

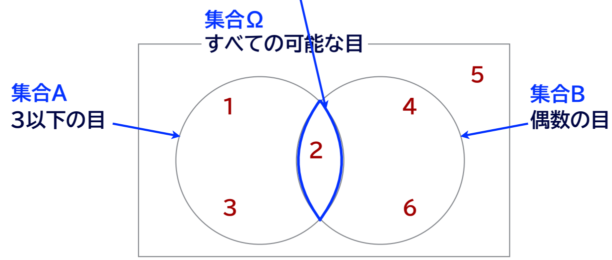


集合と確率

「3以下で, かつ偶数の目が出る確率」

|A ∩ B |/|Ω| = 1/6
P(A ∩ B)で表す

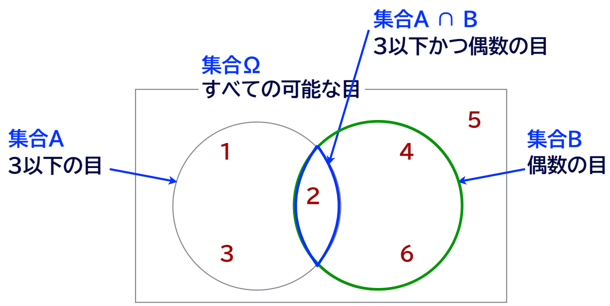
3以下でかつ偶数の目の集合
A ∩ B で表す



この式は何を表す？

|A ∩ B | / |B|　分母がΩではなくB

「可能なすべての目」は，ΩではなくBになった



条件つき確率

|A ∩ B| / |B|　分母がΩではなくB

「可能なすべての目」は，ΩではなくBになった

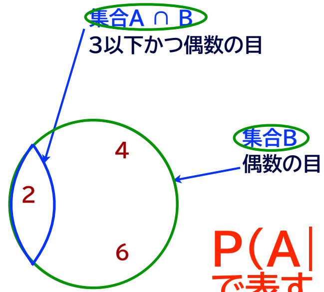
偶数の目が出るとわかっているときに

「3以下~~かつ偶数~~」の目が出る確率

わかってます

偶数が出ることを条件とする，

3以下が出る[条件つき確率]



P(A|B)
で表す

条件付き確率

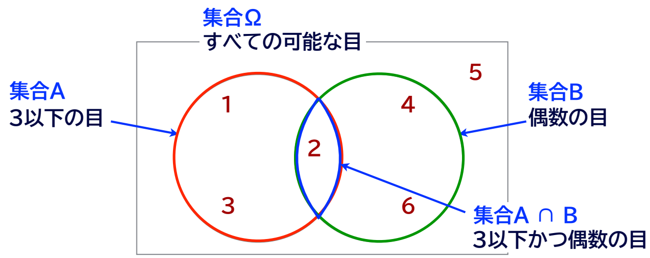
「3以下の目が出る確率」　P(A) = |A| / |Ω| = 3/6 = 1/2

偶数が出ることを条件とする，

3以下が出る条件つき確率　P(A|B) = |A ∩ B| / |B| = 1/3

「偶数が出る」という情報によって，

3以下が出る確率が変化した



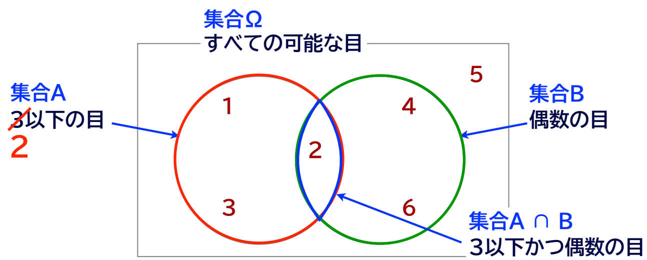
「2以下の目」だったら

「2以下の目が出る確率」　P(A) = |A| / |Ω| = 2/6 = 1/3

偶数が出ることを条件とする，

2以下が出る条件つき確率　P(A|B) = |A ∩ B| / |B| = 1/3

つまり　P(A) = P(A|B)



「独立」

「2以下の目が出る確率」 $P(A) = |A| \,/\, |\Omega| = 2/6 = 1/3$

偶数が出ることを条件とする，
2以下が出る条件つき確率 $P(A|B) = |A \cap B| \,/\, |B| = 1/3$

つまり $P(A) = P(A|B)$　2以下が出る確率は，「偶数が出る」という情報によっても，変化しない

$P(A) = P(A|B)$のとき「事象Aと事象Bは独立」という

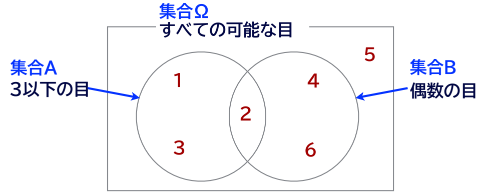
AとBが独立＝「Bが起きる」ことがわかっても，Aが起きる確率には影響がない

確率の積の法則

Bを条件とする，Aの条件つき確率

$$P(A|B) = |A \cap B| \,/\, |B|$$
$$= (|A \cap B| \,/\, |\Omega|) \,/\, (|B| \,/\, |\Omega|)$$
$$= P(A \cap B) \,/\, P(B)$$

つまり
$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$



確率の積の法則

$$P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B)$$

AとBの両方が起きる確率

とりあえずBが起きるものとして，そのときにAが起きる確率

ところで，Bが本当に起きる確率

AとBが独立のときは，$P(A|B) = P(A)$ だから
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

AとBが独立のときだけ，こうなることに注意　※勝手に独立にしてはいけません。

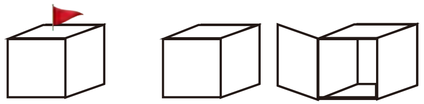
モンティ・ホール問題

モンティ・ホール問題

モンティ・ホール氏が司会するテレビ番組

箱が3つあり、ひとつだけに賞品がある。
ゲストが箱をひとつ選ぶが，まだ開けない

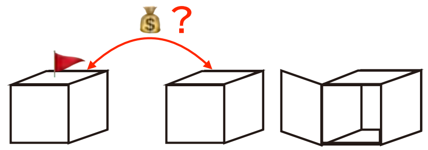
モンティは賞品のありかを知っている。
彼は「ゲストが選ばなかった空箱」を1つ開けて



モンティ・ホール問題

「いまなら，さっき選んだ箱ではなく，
まだ開けていないもう1つの箱を選んでもかまいません」

選ぶ箱を変えるほうが，当たる確率が大きくなるか？



答えは

ゲストが選ぶ箱を変えないと，当たる確率1/3

箱を変えると，当たる確率2/3

箱は残り2つだから，当たる確率は，
箱を変えても変えなくても1/2じゃないの？

※違います。「勝手に同確率」にしてはいけません。

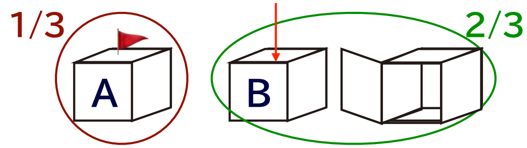
もっとも簡単な説明

箱をA,B,Cとし，ゲストがAを選んだとする

賞品が　Aにある確率　1/3
「BまたはC」にある確率　2/3

モンティが開けるのは必ず空の箱 → 上の確率は，
箱を開けても変わらない

ここに賞品がある確率2/3



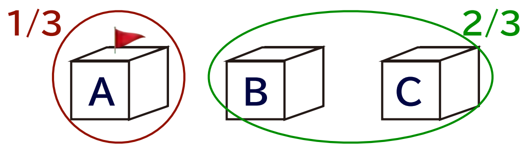
本当に正しいか？

賞品が　Aにある確率　1/3
「BまたはC」にある確率　2/3

この確率は，
箱を開けても変わらない

本当か？

「モンティは，賞品がある箱は開けない」

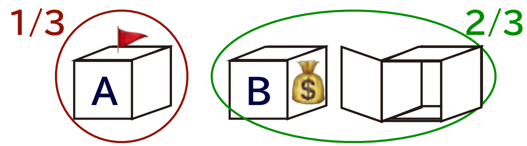


本当に正しいか？

「モンティは，賞品のある箱は開けない」

賞品がBにあるなら，Cしか開けられない
賞品がCにあるなら，Bしか開けられない

「BまたはCにある確率2/3」は，　箱を開けても変わらない

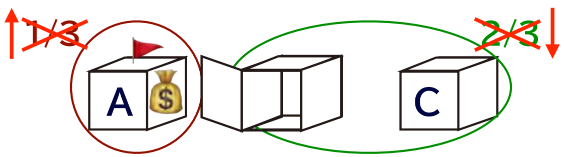


本当に正しいか？

「モンティは，賞品のある箱は開けない」
　賞品がAにあるときは？　モンティはB,Cのどちらを開けてもよい

もしも「賞品がAにあるときは，必ずBを開ける」という
裏ルールがあったら？

モンティがBを開けたら，賞品はAにある可能性が高い

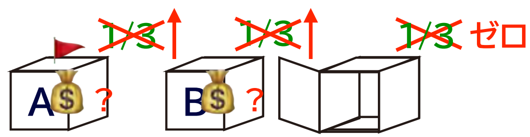


本当に正しいか？

「モンティは，賞品のある箱は開けない」
　モンティが，↑これを守ってなかったら？

モンティは，実はA,B,Cを同じ確率でランダムに選んでおり，
今回たまたまCを開けたら空だった，としたら

賞品がA,Bにある確率が平等に大きくなる



この問題のポイントは

モンティの行動は，賞品のありかを知る手がかりになっているか？

それは，「他にどんな可能性があったか」によって変わる

それには，モンティの「心の中」が影響します。