2020年度秋学期　統計学　　第11回

分布の「型」を考える ― 確率分布モデルと正規分布

浅野　晃
関西大学総合情報学部

ちょっと前回の復習📝

「統計的推測」とは

調べたいデータ全体を調べられるか？

日本男性全員の身長を調べられるか？

データの一部を調べて度数分布を推測する

いや，せめて平均や分散を推測する

統計的推測

無作為抽出

データ全体から，いくつかの数値を
公平なくじびきで選ぶ

[無作為標本抽出]という

調べたい(が全部を調べるのは無理な)集団[母集団]

調べられる程度のデータ[標本(サンプル)]

度数分布で考えると

母集団の度数分布

階級値	相対度数
162.5	15%
167.5	20%
172.5	20%
177.5	10%

無作為抽出 →

標本の[確率分布]

階級値	選ばれる確率
162.5	15%
167.5	20%
172.5	20%
177.5	10%

確率分布と確率変数

つまり 母集団の度数分布（母集団分布） ＝ 標本の確率分布

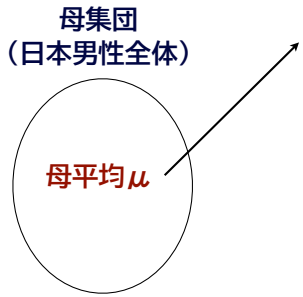
階級値	選ばれる確率
162.5	15%
167.5	20%
172.5	20%
177.5	10%

標本の値がいくらになるかは決まっていない

しかし確率分布が決まっている

標本は[確率変数]である，
という（中国語では随機変数）

母平均の推定

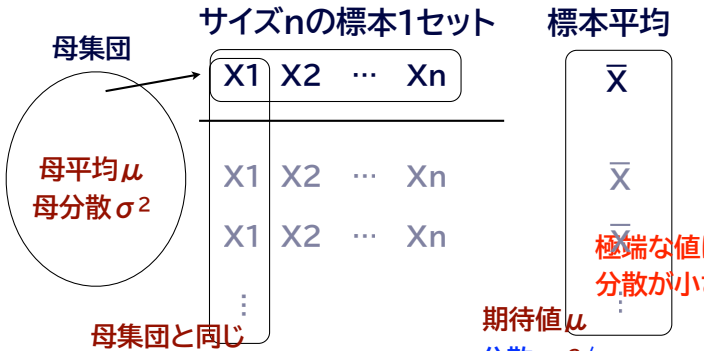


標本として数値をいくつか取り出して，
それらの平均 [標本平均]

標本平均は母平均に近い値になるか？

母平均が知りたい が，日本男性全員は調べられない

標本平均の期待値と分散は



標本平均の分散は，母分散の「標本サイズ分の一」になる

母平均の推定

母平均がμ
母分散がσ^2 のとき，標本平均の期待値がμ
標本平均の分散がσ^2/n

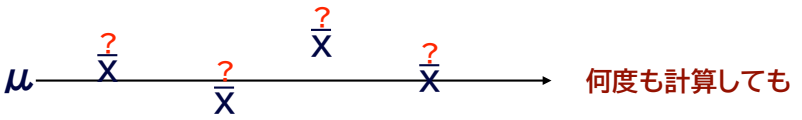
仮に，何度も標本を抽出して，
何度も標本平均を計算したとすると

分散が小さくなっているので，
「たいてい，ほぼ」母平均に近い値になる

いま1回だけ計算した標本平均も，
たいてい，ほぼ母平均に近い値だろう

母平均の推定

いま1回だけ計算した標本平均も，
「たいてい，ほぼ」母平均に近い値だろう



いつ計算してもそれほどかわらない

いま1回だけ計算した標本平均は
上のどれにあたるかはわからないが，
いずれにせよあまりかわらない

ところで

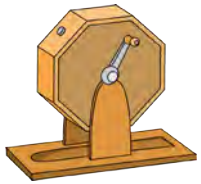
母分散がσ^2のとき，標本平均の分散がσ^2/n

標本平均の分散に関係しているのは
標本の大きさであって，母集団の大きさは関係ない

推測の確かさに影響するのは
標本の大きさであって，
標本の大きさの，母集団の大きさに対する割合 ではない

標本の大きさとは

「10人からなる標本」の意味は，
1,000人からなる母集団でも
100,000人からなる母集団でも同じ 🤔…



理想的な無作為抽出であれば，標本サイズは，
「数値の個数」というよりも
「同一の母集団から数値ひとつひとつを
取り出す回数」

母平均の推定

いま1回だけ計算した標本平均も，
「たいてい，ほぼ」母平均に近い値だろう

どのくらい近い？

どのくらいの確率で？
はずれる確率は？

ここから先に進みます。

分布の「型」を考える🤔

母平均の推定

いま1回だけ計算した標本平均も，
「たいてい，ほぼ」母平均に近い値だろう

どのくらい近い？

どのくらいの確率で？
はずれる確率は？

計算するには，
式で表されてないといけない

確率分布と確率変数

つまり 母集団の度数分布（母集団分布） ＝ 標本の確率分布

階級値	選ばれる確率
162.5	15%
167.5	20%
172.5	20%
177.5	10%

これは式ではなく数値の集まり，
計算できない

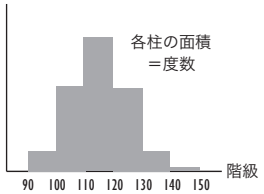
式で表す

度数分布を

階級値	選ばれる確率
162.5	15%
167.5	20%
172.5	20%
177.5	10%

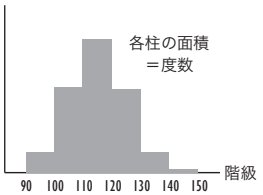
何かの式で書ける
ものと仮定する

ヒストグラムが



何かの式で表される関数の
グラフであると仮定する

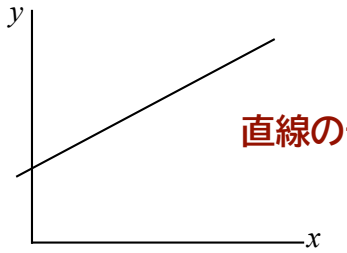
確率分布モデルとパラメータ



何かの式のグラフで
あると仮定する

式＝[確率分布モデル]

パラメータを推定すればグラフが描ける



直線のモデル

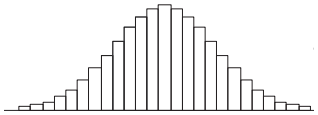
$$y = ax + b$$

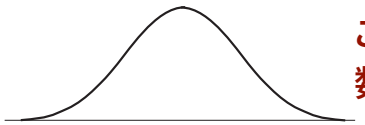
パラメータ

連続型確率分布📈

ヒストグラムを式で表す

こんなヒストグラムを，
式で書けるだろうか？



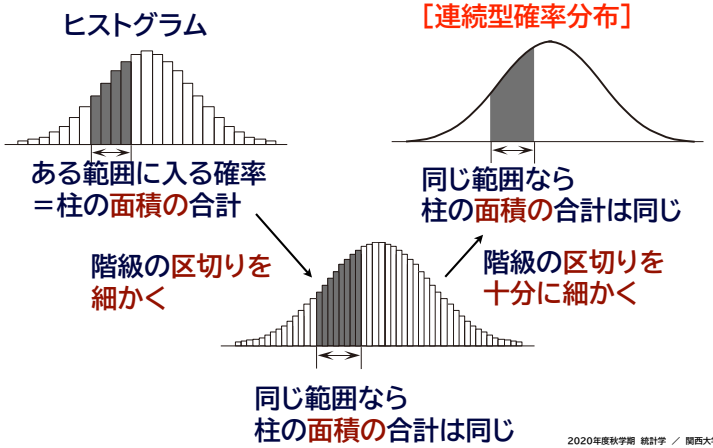


これを表す式のほうが
数学は簡単。

階級の区切り方が
どんどん細かくなって，
見えなくなったと考える

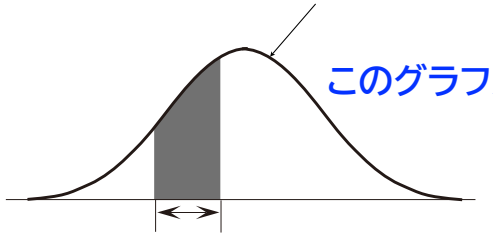
[連続型確率分布]

連続型確率分布



確率密度関数と確率

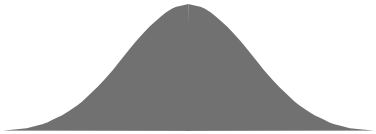
ヒストグラムの上の縁＝［確率密度関数］



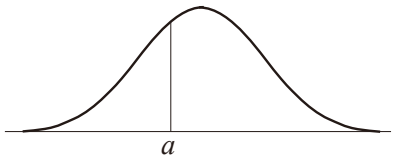
このグラフが示すのは確率ではない

この範囲に入る確率＝この面積
＝確率密度関数の積分

確率密度関数の矛盾？



連続型確率変数が
すべての実数のうちのどれかになる確率
＝1（100%）

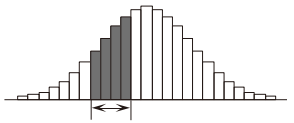


連続型確率変数が
ある特定の値aになる確率
＝0

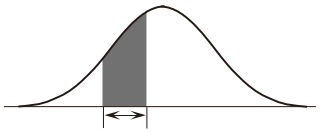
幅が0だから，面積も0

なんかヘン？付録テキストで

連続型確率分布は，数学の都合



こんなのより



こんなののほうが数式にしやすい

実際のデータは，有限の桁数の数字で
表されている限り，必ず離散的。

正規分布モデル

正規分布モデル

世の中には，[正規分布モデル]で表せるよう
な母集団分布がたくさんある

長さの測定値の分布
センター試験の成績の分布　…

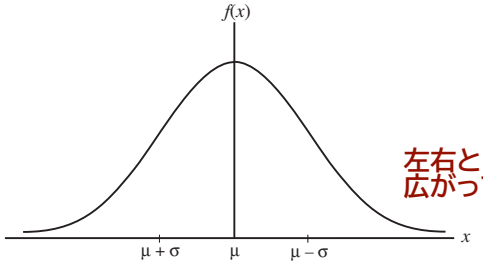
［中心極限定理］

母集団のばらつきの原因が
無数の独立な原因の和のとき，
母集団分布は概ね正規分布になる

正規分布の特徴

パラメータが平均(期待値)と分散
μ　　σ^2

確率密度関数はこんな形



左右とも無限に
広がっている

正規分布の特徴

パラメータが平均(期待値)と分散
μ　　σ^2

(わかりやすいものを推定すればよいので都合がいい)

確率変数Xの確率分布が
期待値μ，分散σ^2の正規分布であることを

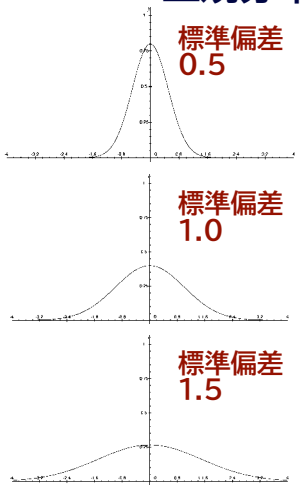
確率変数XがN(μ, σ^2)にしたがう　という

※英語ではnormal distribution，中国語では「常態分配」

正規分布の特徴

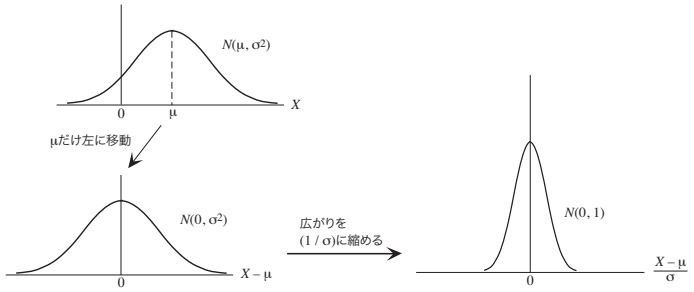
期待値0の正規分布の
確率密度関数

標準偏差が大きくなると
中央部の広がりが大きくなり
高さが低くなる



正規分布の性質1

確率変数XがN(μ, σ²)にしたがう とき



(X-μ)/σ はN(0, 1)にしたがう

正規分布の性質1

確率変数XがN(μ, σ²)にしたがう とき

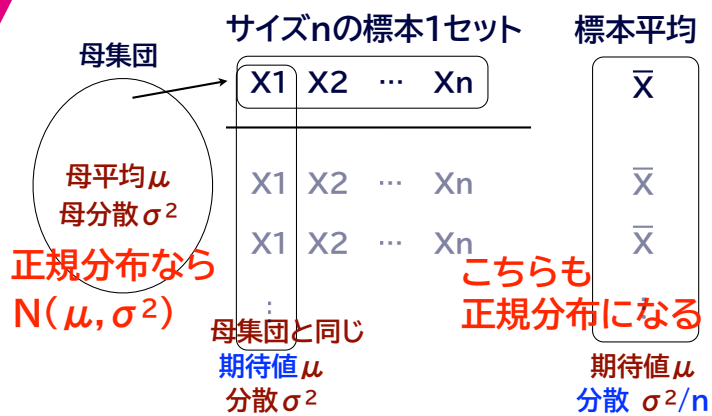
(X-μ)/σ はN(0, 1)にしたがう

「標準得点」と同じ

変換しても,
やはり正規分布になる

N(0,1)を[標準正規分布]という

正規分布の性質2



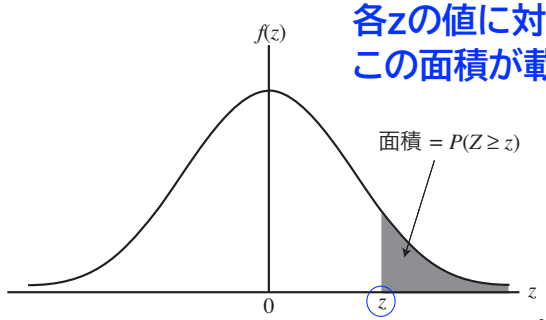
正規分布表の使いかた🔢

正規分布にもとづく計算

正規分布にしたがう確率変数がある範囲に入る確率

数表を使って求める

標準正規分布について，
各zの値に対する
この面積が載っている



正規分布にもとづく計算

例)確率変数XがN(50, 10^2)にしたがうとき，
Xが60以上である確率を求めよ。

性質1により，Z = (X - 50) / 10 と変換
Zは標準正規分布にしたがう

X=60のとき，Z=(60 - 50) / 10 = 1

よって，求めるのは，Zが1以上である確率 $P(Z \geqq 1)$

正規分布にもとづく計算

$P(Z \geqq z)$ を求める

zの小数第2位

zの小数第1位まで

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	…
0.0	0.50000	0.49601	0.49202	0.48803	0.48405	0.48006	
0.1	0.46017	0.45620	0.45224	0.44828	0.44433	0.44038	
0.2	0.42074	0.41683	0.41294	0.40905	0.40517	0.40129	
0.3	0.38209	0.37828	0.37448	0.37070	0.36693	0.36317	
0.4	0.34458	0.34090	0.33724	0.33360	0.32997	0.32636	
⋮			⋮				
1.0	0.15866	0.15625	0.15386	0.15151	0.14917	0.14686	…

$P(Z \geqq 1)$

正規分布にもとづく計算

テキストの「問題例」

確率変数 X が正規分布 $N(50,10^2)$ に
したがうとき，次の確率を求めてください。

（1） $P(X \geqq 55)$　（2） $P(45 \leqq X \leqq 60)$

X が 55 以上である確率　　X が 45 以上で 60以下である確率

考え方

$Z = (X - 50)/10$ と変換すると，正規分布の性質1から，
X は標準正規分布 $N(0,1)$ にしたがう

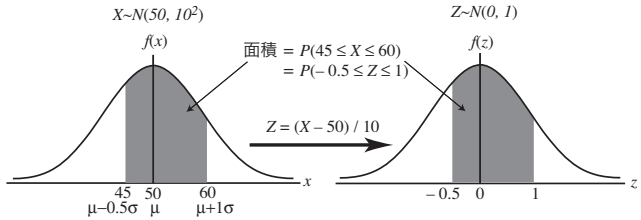
正規分布にもとづく計算

「問題例」の2

$X = 45$ のとき　$Z = (45 - 50)/10 = -0.5$

$X = 60$ のとき　$Z = (60 - 50)/10 = 1$

よって $P(45 \leqq X \leqq 60) = P(-0.5 \leqq Z \leqq 1)$

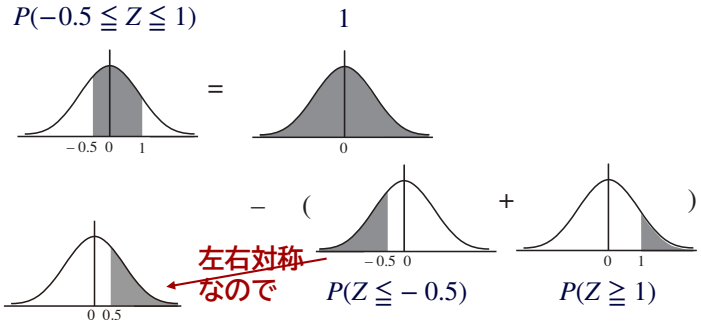


このグレーの部分の面積をどうやって求める？

正規分布にもとづく計算

「問題例」の2　パズルをおこなう

$P(-0.5 \leqq Z \leqq 1)$



左右対称なので

$P(Z \leqq -0.5)$　　$P(Z \geqq 1)$

$= P(Z \geqq 0.5)$