

付録：「離散」と「連続」の間

次の問題を考えてみます。

1 秒毎にステップ式に動くのではなく、連続的に動く秒針があるとします。あなたは、好きなときにボタンを押して秒針を止めることができます。針を見ずにあなたがボタンを押したとき、

- (a) 針が 0 時の位置から 3 時の位置の間に止まる確率はいくらですか。
- (b) 針が 0 時ちょうどの位置に止まる確率はいくらですか。

$\begin{matrix} \wedge \wedge \\ \equiv \cdot \cdot \equiv \\ () \sim \end{matrix}$ (a) は、時計の周囲のうち「0 時の位置から 3 時の位置の間」の幅が円周全体の 1/4, ということから求めればいいけど、(b) はどう考えればいいんでしょう？

(a) と同じように考えるんやけど、「『0 時ちょうどの位置』の幅」
 は、いくらかいな？ $\begin{matrix} \wedge \blacklozenge \wedge \\ \equiv o \cdot o \equiv \\ () \sim \end{matrix}$

針が止まる位置は連続型確率変数と考えることができます。針は一定の速度で動きますから、特定の場所に止まりやすい、止まりにくい、といった偏りはありません。ですから、確率密度関数のグラフは図 A1 のような平坦な形になります。

(a) については、0 時の位置から 3 時の位置に止まる確率は図 A1 の灰色の部分の面積で、0 時から 3 時の間の幅は文字盤 1 周の 1/4 ですから、この面積もグラフの下の部分全体の面積の 1/4 となり、求める確率は 1/4, すなわち 0.25 となります。

これに対して、(b) では、文字盤上で「0 時ちょうど」の部分の幅は 0 ですから、そこに止まる確率も 0 です。この答えについて、こんな疑問を持つ人がいるのではないのでしょうか。

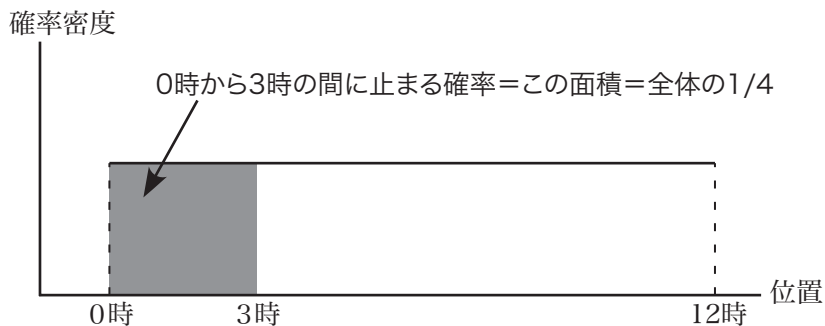


図 A1: 時計の針が止まる位置の確率密度関数

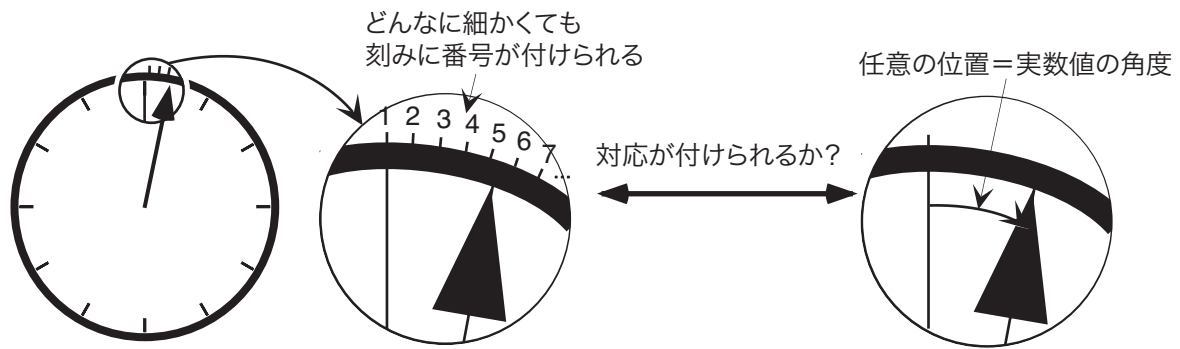


図 A2: 周上の無限個の刻みと、実数値の角度

「12時ちょうどに針が止まる確率は、『12時ちょうど』の幅が0だから、0だという。それならば、12時0分0秒にも12時0分0.1秒にも12時0分0.01秒にも、文字盤の周上のどこに止まる確率もみな0のはずだ。それなのに、『0時から3時までの間』のどこかに止まる確率は1/4だという。これはどういうことか」

この疑問に答えるポイントは、**文字盤の周をいくら細かく刻んでも、その刻みで文字盤の周全体を埋め尽くすことはできない**ということです。つまり、12時0分0秒にも止まる確率も、12時0分0.1秒に止まる確率も、12時0分0.01秒に止まる確率も皆ゼロですが、だからといって「文字盤の周上のどこに止まる確率もみな0」ではないのです。

文字盤の周を、1秒刻み、0.1秒刻み、0.01秒刻み、といくらでも細かく刻むことはできます。したがって、文字盤の周に無限個の刻みを並べることができます。このように「びっしり」と並んだ無限個の刻みは、数学の言葉では**稠密**であるといいます。このような無限個の刻みには、12時ちょうどの位置から数えて、1番から順に番号をつけることができます。「無限個だが、番号をつけて数えることができる」ことを、「数えられる無限」という意味で**可算無限**といいます。

一方、文字盤の周上の位置は、例えば12時ちょうどの位置を0度として、実数値の角度で表現できます。もし、文字盤の周上の角度を表す全ての実数値に1番から番号をつけることができるなら、それは「可算無限個の刻みで、文字盤の周上の全ての点を埋め尽くすことができる」つまり「無限に刻みを細かくすれば、文字盤の周上のどんな位置でも表せる」ことになります。それならば、刻みの各点に止まる確率は0ですから、文字盤の周上のどこに止まる確率も0ということになります。

しかし、実は「**全ての実数値に1番から番号をつけることはできない**」のです。つまり、「無限個」にも「大小」があり、文字盤の周上の実数値の数は、可算無限個よりもずっと多い、別種の無限個なのです。直観的にいえば、可算無限個の刻みは「びっしり」並んでいるのに対して、実数は「べったり」と並んでいる、ということです¹。

実数が可算でないことは、次に示す**カントールの対角線論法**で簡単に説明できます。説明を簡単にするため、0以上1未満の実数を考えることにします。この区間のすべての実数は、 $0.xxxx\dots$ の形の、有限小数あるいは循環する無限小数（すなわち有理数）、あるいは循環しない無限小数（すなわち無理数）で表されます²。さて、すべての実数に1番から番号をつけるとしましょう。そこで、

¹実数は、さきほど述べた「稠密性」だけではなく、「連続性」を持っています。

²正確には、例えば $0.1 = 0.0999\dots$ のように、有限小数は無限小数の形に統一して表すことにします。

全ての実数が並べ
られているとする

1番	0.123456...
2番	0.893129...
3番	0.230490...
	⋮
	⋮
	⋮

対角線上の数を取り出す

0.190...



各けたを1ずつずらす

0.201...



この数は、左の表にはない
(n 番の数とは小数第 n 位で異なっている)

図 A3: 対角線論法

図 A3 のようにすべての実数を 1 番から順に上から並べた表を作ります。そこで、この表から、「1 番の実数の小数第 1 位、2 番の数の小数第 2 位、 \dots 、 n 番の数の小数第 n 位、 \dots 」のように、対角線上の各数字をつなぎあわせた数をつくり、さらにその数の各けたを「 $0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 2, \dots, 9 \rightarrow 0$ 」のように置き換えた数を考えます。この数は、さっきの表の 1 番の数とは小数第 1 位で、2 番の数とは小数第 2 位で、 \dots 、 n 番の数とは小数第 n 位で、 \dots 、それぞれ異なっています。つまり、表のどの数とも異なった数が存在することになり、「すべての実数を並べた表」であるということに矛盾します。つまり、「すべての実数を 1 番から順番に並べることはできない」ということが証明されます。

「無限にも大小がある」という事実が数学に与えた衝撃は、その後の数学をそれ以前のものとは根本的に違ったものにしてしまったほど、大きなものでした。そのあたりを平易に解説した本としては、瀬山士郎「はじめての現代数学」(ハヤカワ文庫 NF ISBN978-4150503468) をおすすめします。