2020年度秋学期 統計学　第13回

不確かな測定の不確かさを測る
— 不偏分散とt分布

浅野 晃
関西大学総合情報学部

ちょっと（ほんのちょっと）
前回までの復習

正規分布の場合の区間推定

例題

母集団
（受験者全体）

母平均μ

正規分布
と仮定する

標本X1, ... Xnをとりだす
サイズn

標本平均 $\bar{X}$

母平均μの95%信頼区間が知りたい

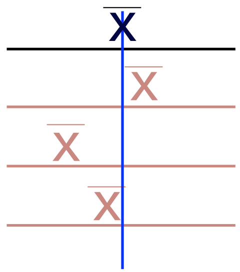
母分散σ^2がわかっているものとする（説明の都合です）

区間推定の考え方

数値をいくつか抽出して標本平均

仮に，何度も抽出したとすると

標本平均の期待値
＝母平均



標本平均にすることで
ばらつきが小さくなる

標本平均の分散
＝母分散÷標本サイズ

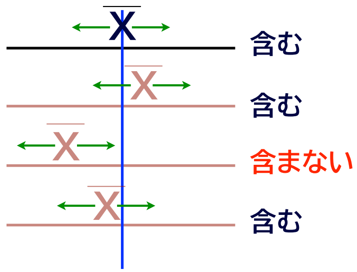
母平均（実際にはわからない）
のまわりにばらついている

区間推定の考え方

標本平均の左右に区間をつける

区間は母平均を

どの回の区間が母平均を含むか・
含まないかはわからないが

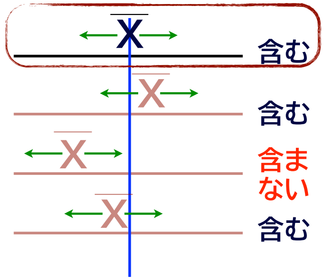


母平均（実際にはわからない）

確率95%で
母平均を含むように
区間を設定できる

信頼区間

区間は母平均を



母平均
（実際にはわからない）

確率95%で
母平均を含むように計算した区間だから，
1回だけ計算した区間でも含むと信じる

母平均の
[信頼係数] 95%の
[信頼区間] という
（[95%信頼区間]）

不偏分散💡

正規分布の場合の区間推定

例題

母集団
（受験者全体）

母平均μ

正規分布
と仮定する

標本 X_1, ... X_n をとりだす
サイズ n

標本平均 $\bar{X}$

母平均 μ の95%信頼区間が知りたい

母分散 σ^2 がわかっているものとする（説明の都合です）

母分散は，ふつうはわからない

母集団全体は調べていないし，母平均もわからない
（わからないから，いま推定しようとしている）

それなのに，母分散がわかるはずがない

母分散の「代用品」を，標本を使って計算できないか。

標本を使って分散を計算

分散＝（偏差）²の平均
（データの各数値）ー（データの平均）

標本を使って分散を計算する。

データ： 標本 X_1, ... X_n
データの平均： 本当は母平均だが，
わからないので標本平均 $\bar{X}$ で代用

標本を使って分散を計算

標本を使った分散

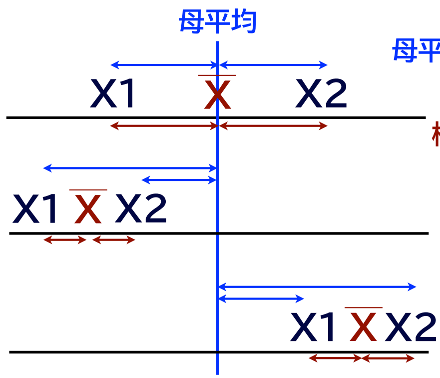
$$S^2 = \frac{1}{n}\{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \cdots + (X_n - \bar{X})^2\}$$

標本サイズで割る

分散＝（偏差）²の平均
だから当然だけど… 本当にこれでいいの？

標本平均を用いた偏差

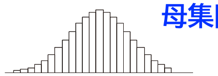
標本サイズ n=2 とする 標本は X1, X2



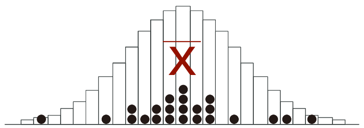
標本平均との隔たりのほうが
たいてい小さい

標本平均を用いた偏差

別の説明

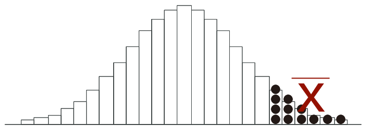


母集団の度数分布



これなら
「標本平均との隔たり」と
「母平均との隔たり」は
かわらない

こんなふうに偏っていると
「標本平均との隔たり」
のほうが小さい



不偏分散

母平均との隔たりよりも
標本平均との隔たりのほうが
たいてい小さい

標本平均との隔たりを使って分散を計算すると，
母分散よりもたいてい小さめになる

では，計算のときに少し大きめにしておけば？

不偏分散

計算のときに少し大きめにする

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\{(X_1-\bar{X})^2+(X_2-\bar{X})^2+\cdots+(X_n-\bar{X})^2\}$$

（標本サイズ － 1）で割る

これを不偏分散（不偏標本分散）といい，
母分散の代用に用いる

「不偏」とは？

「不偏」とは？

標本平均との隔たりを使って分散を計算すると，
母分散よりもたいてい小さめになる

計算のときに少し大きめにすると？

母分散と一致するわけではないが
母分散より大きくも小さくも平等にはずれる

「不偏」とは「えこひいきしない」こと

不偏分散を用いた区間推定

前回の例題

ある試験の点数の分布は正規分布であるとします。

この試験の受験者から，10人からなる標本を無作為抽出して，
この人たちの点数を平均したところ50点でした。

この試験の受験者全体の標準偏差が5点であるとわかっている
とき，受験者全体の平均点の95%信頼区間を求めてください。

例題

母集団
（受験者全体）

母平均μ

正規分布
と仮定する

標本 X_1, ... X_n をとりだす
サイズ n

標本平均 $\bar{X}$

母平均 μ の95%信頼区間が知りたい

母分散 σ^2 がわかっているものとする（説明の都合です）

考え方

標本は，母集団分布と同じ確率分布にしたがう
正規分布N（μ，σ^2）

標本平均は，やはり正規分布にしたがうが，
分散が1/nになる　［性質2］
正規分布N（μ，σ^2/n）

正規分布の場合の区間推定

考え方

標本は，母集団分布と同じ確率分布にしたがう

正規分布N（μ, σ^2）

$\bar{X}$

標本平均は，やはり正規分布にしたがうが，分散が1/nになる

［性質2］　正規分布N（μ, σ^2/n）

正規分布の［性質1］により

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}$$

は標準正規分布にしたがう

N（0, 1）

本当は，母分散はわからない

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}$$

は標準正規分布にしたがう

N（0, 1）

本当は母分散はわからない

不偏分散で代用する

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$$

不偏分散

t は何分布にしたがう？

t分布

t統計量　$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$　は

自由度（n−1）のt分布にしたがう

t（n−1）

（「スチューデントのt分布」という）

発見者ウィリアム・ゴセットのペンネーム

※ゴセットはギネスビールのエンジニアで，会社との契約のために論文を発表できなかったので，ペンネームで論文を発表した。

正規分布（母分散不明）の場合の区間推定

テキストの例題

ある試験の点数の分布は正規分布であるとします。

この試験の受験者から，10人からなる標本を無作為抽出して，この人たちの点数を平均したところ50点でした。

この10人の不偏分散が5^2点であるとき，受験者全体の平均点の95%信頼区間を求めてください。

前回は
「受験者全体の標準偏差が5点であるとわかっている」

正規分布の場合の区間推定

例題

母集団
（受験者全体）

母平均μ

正規分布
と仮定する

標本 X_1, ... X_n をとりだす
サイズ n

標本平均 $\bar{X}$

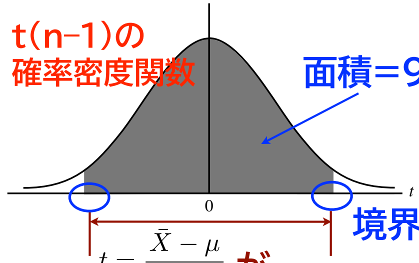
母平均 μ の95%信頼区間が知りたい

母分散 σ^2 がわからないので，　不偏分散 s^2 で代用

t分布を用いた区間推定

$t = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{s^2/n}}$ は自由度(n−1)のt分布にしたがう

t(n−1)

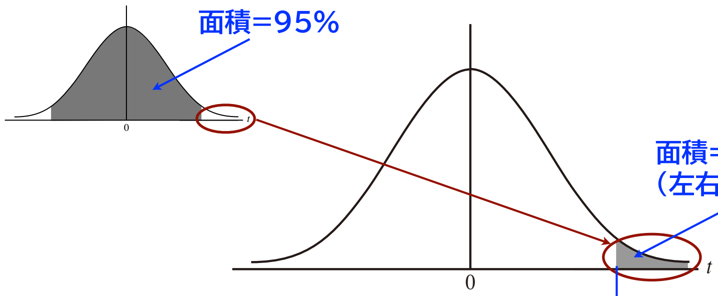


境界の値はいくら？

$t = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{s^2/n}}$ が

この区間に入っている確率=95%とすると

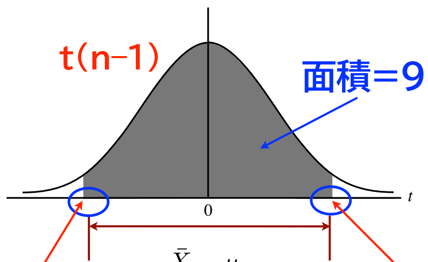
t分布を用いた区間推定



境界の値は自由度によってちがうので

$t_{0.025}(n-1)$ としておく　　［上側2.5%点］

t分布を用いた区間推定



$t = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{s^2/n}}$ が

この区間に入っている確率=95%

$-t_{0.025}(n-1)$　　$t_{0.025}(n-1)$

t分布を用いた区間推定

$t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$ が $-t_{0.025}(n-1)$ と $t_{0.025}(n-1)$ の間に入っている確率が95%

式で書くと $P\left(-t_{0.025}(n-1) \leqq \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{s^2/n}} \leqq t_{0.025}(n-1)\right) = 0.95$

μの式に直すと

$$P\left(\bar{X} - t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}} \leqq \mu \leqq \bar{X} + t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}}\right) = 0.95$$

t分布を用いた区間推定

例題では

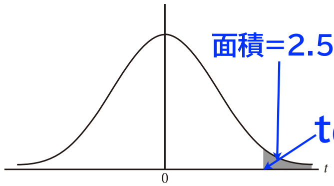
標本平均=50 不偏分散=25 標本サイズ=10

$$P\left(\underline{\bar{X} - t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \leqq \mu \leqq \underline{\bar{X} + t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}}}\right) = 0.95$$

μの95% 信頼区間の下限　μの95% 信頼区間の上限

上側2.5%点 $t_{0.025}(n-1)$ は？

t分布表



パーセントの値　0.025

自由度

	0.40	0.30	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.3249	0.7265	1.0000	1.3764	1.9626	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567
2	0.2887	0.6172	0.8165	1.0607	1.3862	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	0.2767	0.5844	0.7649	0.9785	1.2498	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	0.2707	0.5686	0.7407	0.9410	1.1896	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	0.2672	0.5594	0.7267	0.9195	1.1558	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	0.2648	0.5534	0.7176	0.9057	1.1342	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	0.2632	0.5491	0.7111	0.8960	1.1192	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	0.2619	0.5459	0.7064	0.8889	1.1081	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	0.2610	0.5435	0.7027	0.8834	1.0997	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498

例題では n−1 = 9　$t_{0.025}(9)=2.262$

t分布を用いた区間推定

例題では

$t0.025(10-1)=2.262$

標本平均=50 不偏分散=25 標本サイズ=10

$$P\left(\underline{\bar{X} - t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \leqq \mu \leqq \underline{\bar{X} + t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}}}\right) = 0.95$$

μの95% 信頼区間の下限　μの95% 信頼区間の上限

計算すると，例題の答は

「46.4以上53.6以下」([46.4, 53.6])

前回の例題と比較

どちらも 標本平均=50 標本サイズ=10

母平均の95%信頼区間は

母分散=25 のとき [46.9, 53.1]

不偏分散=25 のとき [46.4, 53.6]

不偏分散は, 母分散の推定量なので, 不確か

→信頼区間が広い