2020年度春学期 統計学 第9回

確からしさを記述する — 確率

浅野 晃
関西大学総合情報学部

「確率」って，よく聞くけれど🤔

※「確立」という書き間違いを見ると，かなりがっかりします😞

※中国語では「概率」あるいは「機率」というそうです

A. Asano, Kansai Univ.

「降水確率40%」って？

何の割合が40%？

機会
現在と同じ気象状況が
これから何度も何度も起きるとすると
そのうち40%の場合で雨になる

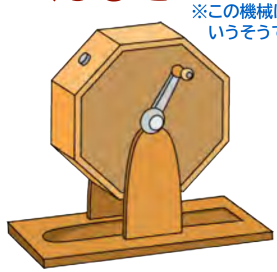
機会のうちの割合が40%

A. Asano, Kansai Univ.

可能性の集合

くじびき

※この機械は「新井式廻轉抽籤器」と
いうそうです（リンク参照）



https://illpop.com/png_season/dec01_a07.htm

↓くじをひくと

当たった！

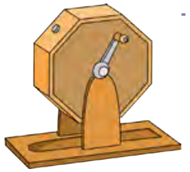
現実におきたのは，
これだけ

他のことは
おきていない

A. Asano, Kansai Univ.

可能性の集合

しかし



当たった

他の可能性もあった

はずれ　当たり　はずれ

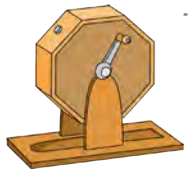
こうなるかも
知れなかった

「偶然」(人知が及ばない)

[ランダム現象]という

可能性の集合

現実 | 可能性



当たった

はずれ　当たり　はずれ

可能性のうち
どの結果になりやすいか?

を, 数値で表せないか?
(ギャンブラーの数学)

「確率」の定義

頻度による確率の定義

あるできごとがおきる確率は,
[事象] event

そのできごとがおきる可能性のある
十分多くの機会があるとき,
[試行] trial

それらの機会のうち
そのできごとがおきる機会の数の割合

くじを十分多くの回数ひくとき,
10回中3回の割合で当たるなら, 確率0.3

※確率は「割合」なので,「大きい・小さい」と表現します。
「高い・低い」なのは「可能性」です。

頻度による確率の定義

あるできごとがおきる確率は，

そのできごとがおきる可能性のある
十分多くの機会があるとき，
ダウト(1)　　ダウト(2)

それらの機会のうち
そのできごとがおきる機会の数の割合

確率の定義・ダウト(1)

「十分多くの機会」？

数学でいう「十分多く」とは，

だれかが「十分ではない」といったら，
それに応じていくらでも多くすること
ことができる，　ということ

現実には無理😵

確率の定義・ダウト(2)

機会が「ある」とき？

機会が「あった」ではない

つまり，未来におきるできごとの
話をしている。

未来のことはわからない。

確率を定義はしたけれど

定義することと，測ることとは別

1メートルの定義は？

※元の由来は「地球の北極から赤道までの子午線長の1000万分の1」

※現在は，「光が真空中を 299 792 458 分の1秒の間に進む距離」
（「秒」の定義は略）

1キログラムの定義は？

※元の由来は「10cm立方の水の質量」

※長らく，定義は「国際キログラム原器の質量」とされてきた

※2019年5月20日以降は，プランク定数（光の振動数と光子1個のエネルギーを関係づける定数）を6.626 070 15×10^{-34}(J･s)と定め，「そうなるような質量の単位」がキログラムとされている

確率は測定できないけれど

「十分多くの機会」は現実には無理

未来のことはわからない

でも

過去を未来に延長できると考える

十分多くは無理でも,
「そこそこ多く」の機会があれば
そこそこの精度で確率を推定できる

［大数の法則］

というわけで確率は

「十分多くの機会」に関する話を
次の1回の機会にあてはめている

ギャンブラーは,
日常的に賭けをしているから,
確率の大きなできごとを見抜いて賭ければ,
全体として勝つことができる

どんな名ギャンブラーでも, 1回の賭けに
必ず勝つことはできない

もうひとつの確率の定義🤔

さいころで1が出る確率

なぜ1/6なのか？

$$\frac{\text{「1」は1通り}}{\text{1, 2, 3, 4, 5, 6の6通り}} = 1/6$$

確率の[ラプラスの定義]という

さっきの「頻度による定義」とは違う…

ラプラスの定義の意味

n回　　　　　　　　　　　　　　　　= n/(6n)

「1」は1通り

―――――――――――――― = 1/6

1, 2, 3, 4, 5, 6の6通り

n回 n　n　n　n　n

1～6が皆同じ確率で出る, と認めるなら

「同様に確からしい」 equally likely

さいころを6n回ふる。（nは十分大きい）

nが十分大きければ,
1～6は同じ回数出る（頻度による定義）

ラプラスの定義の意味

1～6が皆同じ確率で出る, と認めるなら

「同様に確からしい」

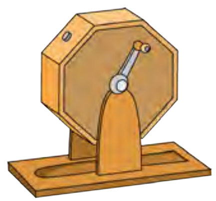
正しいと証明する方法はない

このさいころは偏っていない
だろうという
「信頼」によって認めているだけ

条件付き確率と独立🤔

統計学でいう「独立」とは

2つのランダム現象がおきるとき,
一方の結果がもう一方に影響しない



2度続けてひくとき,

1度めで出た玉を戻さなければ, 独立でない

1度めで当たりが出ると,
2度めは当たりが減っている

正確には[条件付き確率]を使って定義する

条件付き確率

「雨が降る確率」

「雨の予報が出ているときに雨が降る確率」

ふつう，こちらの方が大きい

何かがおきたときに
何かがおきるとわかったときに
何かがおきるのが確実なときに

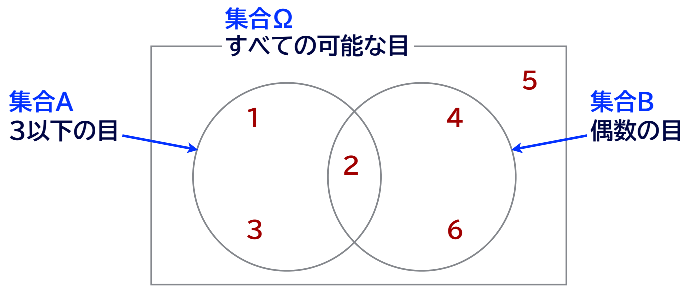
別のことがおきる確率

「何か」がおきることの影響を受けることがある
（「何か」と「別のこと」に因果関係がなくても）

さいころの例で

集合を表す「ベン図」を使って考える

さいころの「可能な目」は，1,2,3,4,5,6

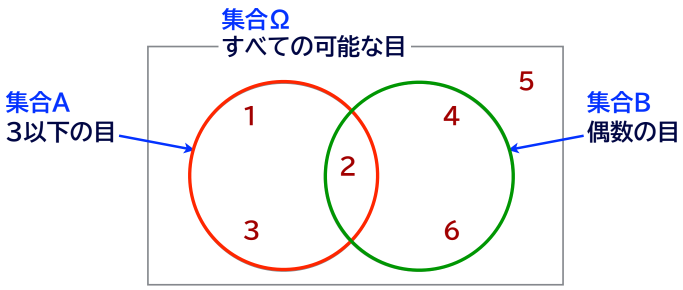


集合と確率

集合Xの要素の数を|X|で表す

「3以下の目が出る確率」
$|A|/|\Omega| = 3/6$
P(A)で表す

「偶数の目が出る確率」
$|B|/|\Omega| = 3/6$
P(B)で表す



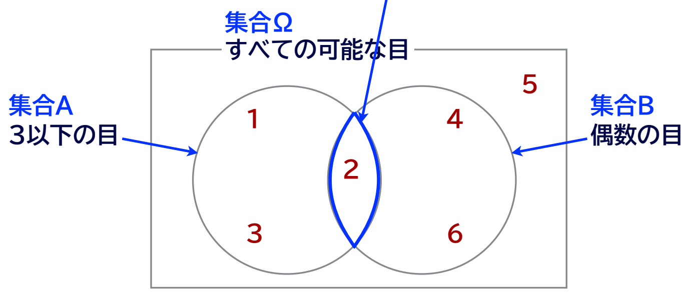
集合と確率

「3以下で，かつ偶数の目が出る確率」

$|A \cap B|/|\Omega| = 1/6$

P(A ∩ B)で表す

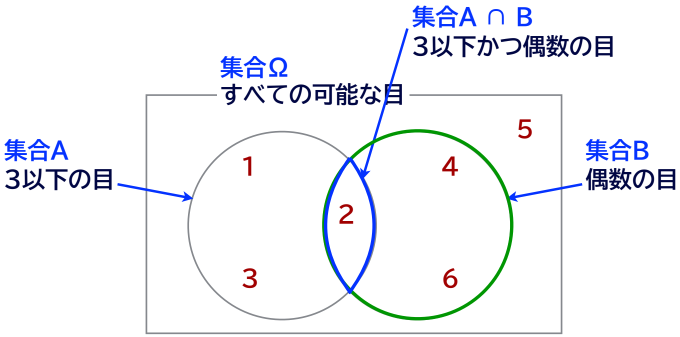
3以下でかつ偶数の目の集合
A ∩ B で表す



この式は何を表す？

$|A \cap B| / |B|$ 分母がΩではなくB

「可能なすべての目」は
Ωではなく Bになった



条件つき確率

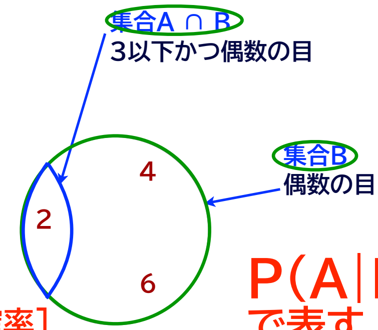
$|A \cap B| / |B|$ 分母がΩではなくB

「可能なすべての目」は
Ωではなく Bになった

偶数の目が出ると
わかっているときに

わかってます
「3以下かつ偶数」の
目が出る確率

偶数が出ることを
条件とする,
3以下が出る[条件つき確率]



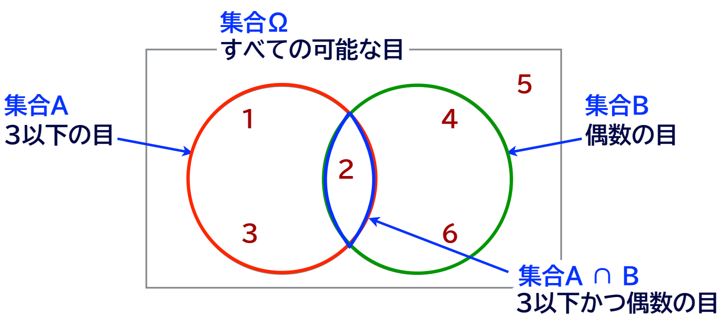
P(A|B)
で表す

条件付き確率

「3以下の目が出る確率」 $P(A) = |A| / |\Omega| = 3/6 = 1/2$

偶数が出ることを条件とする,
3以下が出る条件つき確率 $P(A|B) = |A \cap B| / |B| = 1/3$

「偶数が出る」という情報によって,
3以下が出る確率が変化した

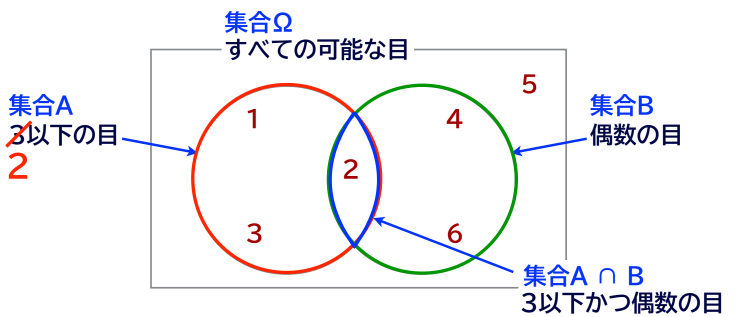


「2以下の目」だったら

「2以下の目が出る確率」 $P(A) = |A| / |\Omega| = 2/6 = 1/3$

偶数が出ることを条件とする,
2以下が出る条件つき確率 $P(A|B) = |A \cap B| / |B| = 1/3$

つまり
$P(A) = P(A|B)$



「独立」

「2以下の目が出る確率」　$P(A) = |A| / |\Omega| = 2/6 = 1/3$

偶数が出ることを条件とする，
2以下が出る条件つき確率　$P(A|B) = |A \cap B| / |B| = 1/3$

つまり
$P(A) = P(A|B)$　2以下が出る確率は，「偶数が出る」という情報によっても，変化しない

$P(A) = P(A|B)$のとき
「事象Aと事象Bは独立」という

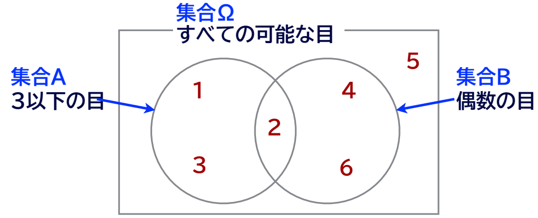
AとBが独立＝「Bが起きる」ことがわかっても，Aが起きる確率には影響がない

確率の積の法則

Bを条件とする，Aの条件つき確率

$$P(A|B) = |A \cap B| / |B|$$
$$= (|A \cap B| / |\Omega|) / (|B| / |\Omega|)$$
$$= P(A \cap B) / P(B)$$

つまり　$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$



確率の積の法則

$$P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B)$$

AとBの両方が起きる確率

とりあえずBが起きるものとして，そのときにAが起きる確率

ところで，Bが本当におきる確率

AとBが独立のときは，$P(A|B) = P(A)$ だから

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

AとBが独立のときだけ，こうなることに注意
※勝手に独立にしてはいけません。

モンティ・ホール問題

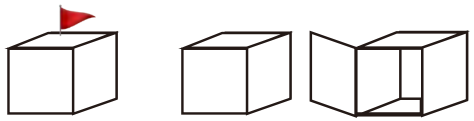
モンティ・ホール問題

モンティ・ホール氏が司会するテレビ番組

箱が3つあり、ひとつだけに賞品がある。

ゲストが箱をひとつ選ぶが，まだ開けない

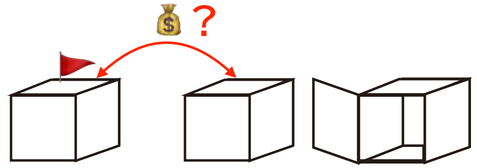
モンティは賞品のありかを知っている。
彼は「ゲストが選ばなかった空箱」を1つ開けて



モンティ・ホール問題

「いまなら，さっき選んだ箱ではなく，
まだ開けていないもう1つの箱を
選んでもかまいません」

選ぶ箱を変えるほうが，当たる確率が
大きくなるか？



答えは

ゲストが選ぶ箱を変えないと，
当たる確率1/3

箱を変えると，当たる確率2/3

箱は残り2つだから，当たる確率は，
箱を変えても変えなくても1/2じゃないの？

※違います。
「勝手に同確率」にしてはいけません。

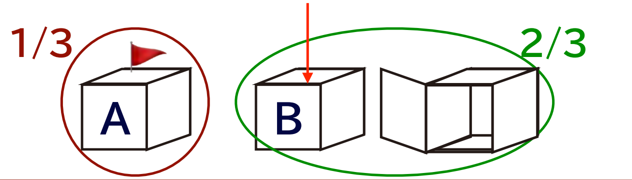
もっとも簡単な説明

箱をA,B,Cとし，ゲストがAを選んだとする

賞品が　Aにある確率　1/3
　　　「BまたはC」にある確率　2/3

モンティが開けるのは必ず空の箱
→ 上の確率は，箱を開けても変わらない

ここに賞品がある確率2/3



本当に正しいか？

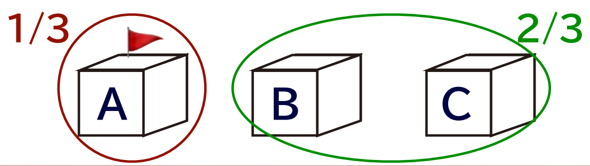
賞品が　Aにある確率　1/3

「BまたはC」にある確率　2/3

この確率は, 箱を開けても変わらない

本当か？

「モンティは, 賞品がある箱は開けない」

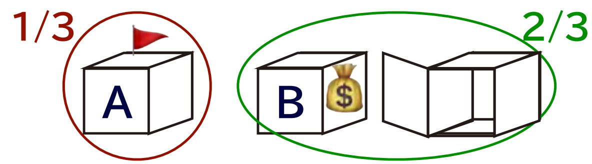


本当に正しいか？

「モンティは, 賞品のある箱は開けない」

賞品がBにあるなら, Cしか開けられない
賞品がCにあるなら, Bしか開けられない

「BまたはCにある確率2/3」は,
箱を開けても変わらない



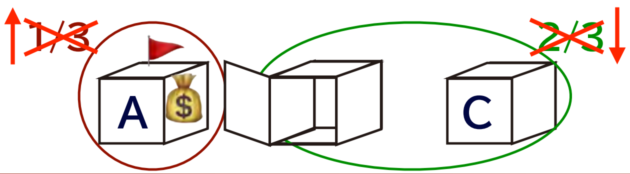
本当に正しいか？

「モンティは, 賞品のある箱は開けない」

賞品がAにあるときは?
モンティはB,Cのどちらを開けてもよい

もしも「賞品がAにあるときは, 必ずBを開ける」
という裏ルールがあったら？

モンティがBを開けたら,
賞品はAにある可能性が高い



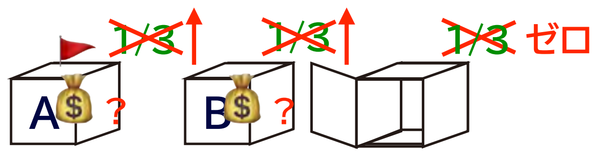
本当に正しいか？

「モンティは, 賞品のある箱は開けない」

モンティが, ↑これを守ってなかったら？

モンティは, 実はA,B,Cを同じ確率でランダムに
選んでおり, 今回たまたまCを開けたら空だった,
としたら

賞品がA,Bにある確率が平等に大きくなる



この問題のポイントは

モンティの行動は，賞品のありかを知る手がかりになっているか？

それは，「他にどんな可能性があったか」によって変わる

それには，モンティの「心の中」が影響します。