2020年度春学期 統計学 第11回

分布の「型」を考える —
確率分布モデルと正規分布

浅野 晃
関西大学総合情報学部

ちょっと前回の復習

「統計的推測」とは

調べたい集団の,
データ全体を調べられるか?

日本男性全員の身長を調べられるか?

データの一部を調べて
度数分布を推測する

いや, せめて平均や分散を推測する

統計的推測

無作為抽出

データの集団から, いくつかの数値を
公平なくじびきで選ぶ

[無作為標本抽出]という

調べたい(が全部を調べるの
は無理な)集団[母集団]

調べられる程度のデータ
[標本(サンプル)]

度数分布で考えると

母集団の度数分布　　　　**標本の[確率分布]**

階級値	相対度数		階級値	選ばれる確率
162.5	15%	無作為抽出 →	162.5	15%
167.5	20%		167.5	20%
172.5	20%		172.5	20%
177.5	10%		177.5	10%

確率分布と確率変数

つまり

母集団の度数分布（母集団分布） = **標本の確率分布**

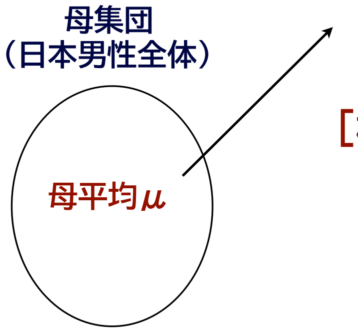
階級値	選ばれる確率
162.5	15%
167.5	20%
172.5	20%
177.5	10%

いくらとは決まっていないが，

確率分布が決まっている

[確率変数]という

母平均の推定



標本として数値を**いくつか**取り出して，それらの平均

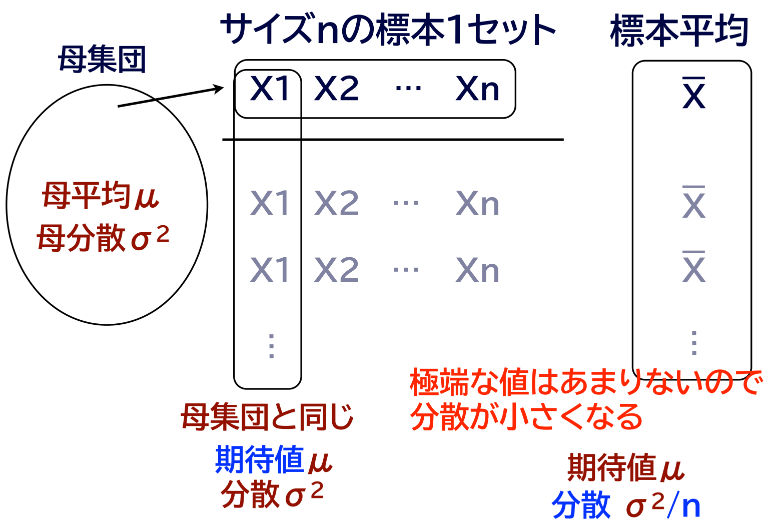
[標本平均]

標本平均は母平均に近い値になるか？

母平均が知りたい

が，日本男性全員は調べられない

母平均の推定



A. Asano, Kansai Univ.

母平均の推定

母平均がμ
母分散がσ^2 のとき，標本平均の期待値がμ
標本平均の分散がσ^2/n

仮に何度も標本を抽出して，何度も標本平均を計算したとすると

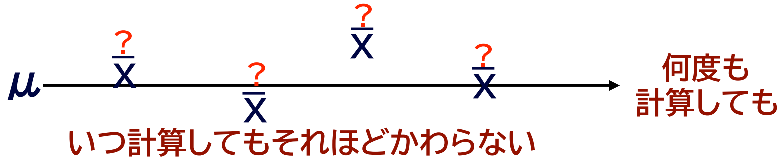
分散が小さくなっているので，
たいてい，ほぼ母平均に近い値になる

いま1回だけ計算した標本平均も，
おそらく，ほぼ母平均に近い値だろう

A. Asano, Kansai Univ.

母平均の推定

いま1回だけ計算した標本平均も，
「たいてい，ほぼ」母平均に近い値だろう



いま1回だけ計算した標本平均は
上のどれにあたるかはわからないが，

いずれにせよあまりかわらない

A. Asano, Kansai Univ.

ところで

母分散がσ^2のとき，標本平均の分散がσ^2/n

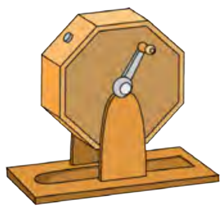
標本平均の分散に関係しているのは
標本の大きさであって，
母集団の大きさは関係ない

推測の確かさに影響するのは
標本の大きさであって，
標本の大きさの，母集団の大きさに対する割合
ではない

A. Asano, Kansai Univ.

標本の大きさとは

「10人からなる標本」の意味は，
1,000人からなる母集団でも
100,000人からなる母集団でも同じ 🤔…



<u>理想的な無作為抽出</u>であれば，
標本サイズは，
数値の個数というよりも
「同一の母集団から数値ひとつを取り出す回数」

母平均の推定

いま1回だけ計算した標本平均も，
おそらく，ほぼ母平均に近い値だろう

どのくらい近い？

どのくらいの確率で？
はずれる確率は？

このあたりを
今回から考える

A. Asano, Kansai Univ.

分布の「型」を考える🤔

A. Asano, Kansai Univ.

母平均の推定

いま1回だけ計算した標本平均も，
おそらく，ほぼ母平均に近い値だろう

どのくらい近い？

どのくらいの確率で？
はずれる確率は？

計算するには，
式で表されて
ないといけない

A. Asano, Kansai Univ.

母集団分布は

つまり

母集団の度数分布
（母集団分布） ＝ 標本の確率分布

階級値	選ばれる確率
162.5	15%
167.5	20%
172.5	20%
177.5	10%

これは式ではなく
数値の集まり，
計算できない

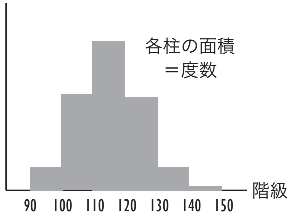
A. Asano, Kansai Univ.

式で表す

度数分布を

階級値	選ばれる確率
162.5	15%
167.5	20%
172.5	20%
177.5	10%

ヒストグラムが

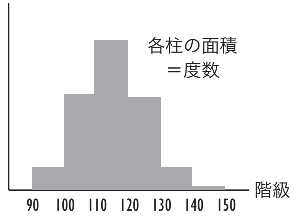


何かの式で書けるものと仮定する

何かの式で表される関数のグラフであると仮定する

A. Asano, Kansai Univ.

確率分布モデルとパラメータ

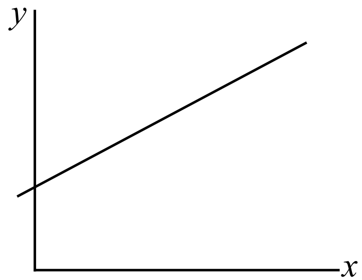


何かの式のグラフであると仮定する

式＝[確率分布モデル]

パラメータを推定すればグラフが描ける

直線のモデル



$$y = ax + b$$

パラメータ

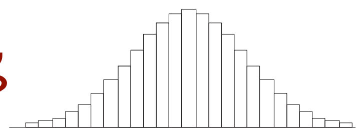
A. Asano, Kansai Univ.

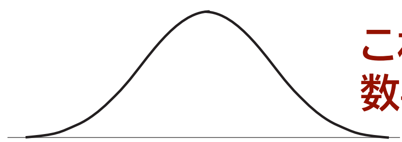
連続型確率分布

A. Asano, Kansai Univ.

ヒストグラムを式で表す

こんなヒストグラムを，式で書けるだろうか？





これを表す式のほうが数学は簡単。

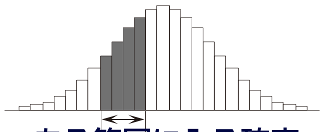
階級の区切り方がどんどん細かくなって，見えなくなったと考える

[連続型確率分布]

A. Asano, Kansai Univ.

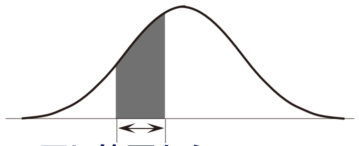
連続型確率分布

ヒストグラム



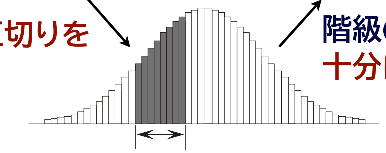
ある範囲に入る確率
＝柱の面積の合計

［連続型確率分布］



同じ範囲なら
柱の面積の合計は同じ

階級の区切りを
細かく



階級の区切りを
十分に細かく

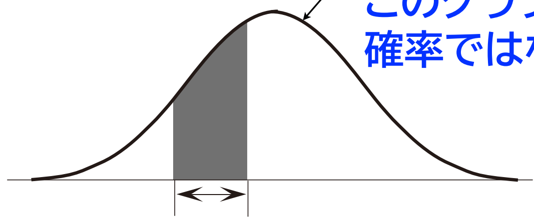
同じ範囲なら
柱の面積の合計は同じ

A. Asano, Kansai Univ.

確率密度関数と確率

ヒストグラムの上の縁＝
［確率密度関数］

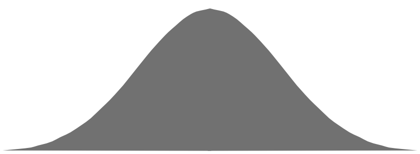
このグラフが示すのは
確率ではない



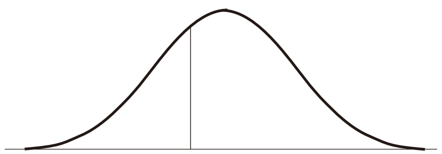
この範囲に入る確率＝この面積
＝確率密度関数の積分

A. Asano, Kansai Univ.

確率密度関数の矛盾？



連続型確率変数が
すべての実数のうちの
どれかになる確率
＝1（100%）



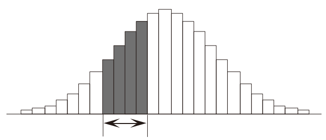
連続型確率変数が
ある特定の値aになる確率
＝0

幅が0だから，面積も0

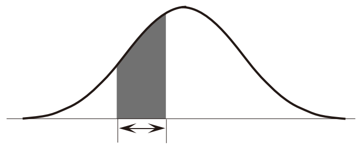
なんかヘン？
付録テキストで

A. Asano, Kansai Univ.

連続型確率分布は，数学の都合



こんなのより



こんなののほうが
数式にしやすい

実際のデータは，有限の桁数の数字で
表されている限り，必ず離散的。

A. Asano, Kansai Univ.

A. Asano, Kansai Univ.

正規分布モデル

A. Asano, Kansai Univ.

正規分布モデル

世の中には，[正規分布モデル]で表せるような母集団分布がたくさんある

長さの測定値の分布
センター試験の成績の分布　…

[中心極限定理]

母集団のばらつきの原因が
無数の独立な原因の和のとき，
母集団分布は概ね正規分布になる

A. Asano, Kansai Univ.

正規分布の特徴

パラメータが平均(期待値)と分散
μ σ^2

(わかりやすいものを推定すればよいので都合がいい)

確率変数Xの確率分布が
期待値μ，分散σ^2の正規分布であることを

確率変数XがN(μ, σ^2)にしたがう　という

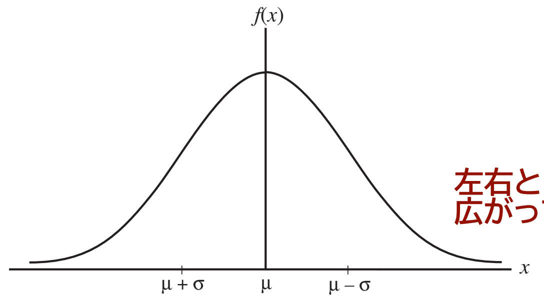
※英語ではnormal distribution，中国語では「常態分配」

A. Asano, Kansai Univ.

正規分布の特徴

パラメータが平均(期待値)と分散
μ σ^2

確率密度関数はこんな形

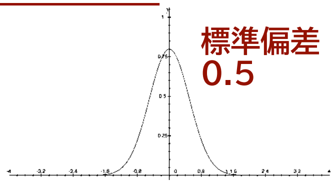


左右とも無限に
広がっている

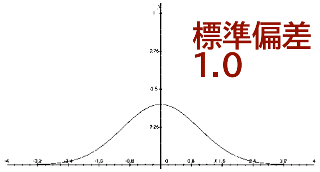
A. Asano, Kansai Univ.

正規分布の特徴

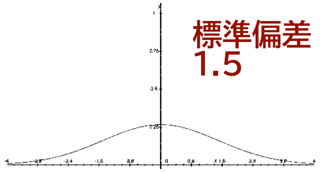
期待値0の正規分布の確率密度関数



標準偏差 0.5



標準偏差 1.0



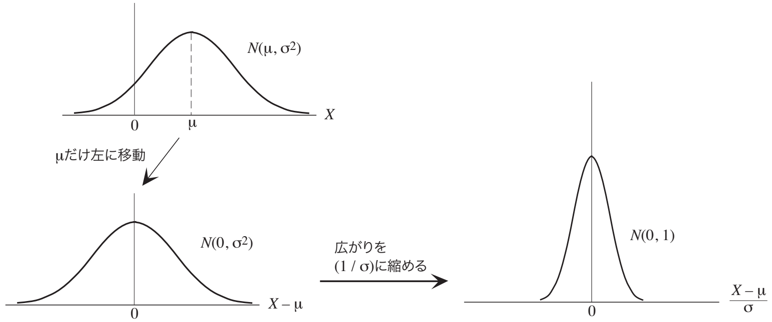
標準偏差 1.5

標準偏差が大きくなると
中央部の広がりが大きくなり
高さが低くなる

A. Asano, Kansai Univ.

正規分布の性質1

確率変数XがN(μ, σ^2)にしたがう とき



$(X-\mu)/\sigma$ はN(0, 1)にしたがう

A. Asano, Kansai Univ.

正規分布の性質1

確率変数XがN(μ, σ^2)にしたがう とき

$(X-\mu)/\sigma$ はN(0, 1)にしたがう

「標準得点」と同じ

変換しても,
やはり正規分布になる

N(0,1)を[標準正規分布]という

A. Asano, Kansai Univ.

正規分布の性質2

母集団

母平均μ
母分散σ^2

正規分布なら
N(μ, σ^2)

サイズnの標本1セット

X1 X2 … Xn

X1 X2 … Xn

X1 X2 … Xn

:

母集団と同じ
期待値μ
分散σ^2

標本平均

$\bar{X}$

$\bar{X}$

$\bar{X}$

こちらも
正規分布になる

期待値μ
分散 σ^2/n

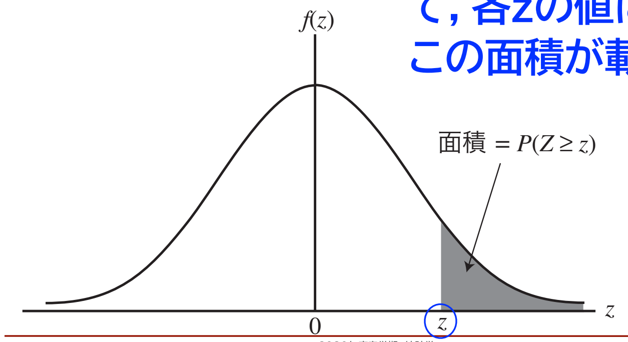
N(μ, σ^2/n)

正規分布表の使いかた🔢

正規分布にもとづく計算

正規分布にしたがう確率変数が
ある範囲に入る確率

数表を使って求める　標準正規分布について，各zの値に対するこの面積が載っている



正規分布にもとづく計算

例）確率変数XがN(50, 10²)にしたがうとき，Xが60以上である確率を求めよ。

性質1により，Z = (X - 50) / 10 と変換
Zは標準正規分布にしたがう

X=60のとき，Z=(60 - 50) / 10 = 1

よって，求めるのは，Zが1以上である確率

$$P(Z \geqq 1)$$

正規分布にもとづく計算

$P(Z \geqq z)$ を求める

zの小数第2位

zの小数第1位まで

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	
0.0	0.50000	0.49601	0.49202	0.48803	0.48405	0.48006	
0.1	0.46017	0.45620	0.45224	0.44828	0.44433	0.44038	
0.2	0.42074	0.41683	0.41294	0.40905	0.40517	0.40129	…
0.3	0.38209	0.37828	0.37448	0.37070	0.36693	0.36317	
0.4	0.34458	0.34090	0.33724	0.33360	0.32997	0.32636	
			⋮				
1.0	0.15866	0.15625	0.15386	0.15151	0.14917	0.14686	…

$$P(Z \geqq 1)$$

正規分布にもとづく計算

テキストの「問題例」

確率変数 X が正規分布 $N(50,10^2)$ に したがうとき，次の確率を求めてください。

（1） $P(X \geqq 55)$　（2） $P(45 \leqq X \leqq 60)$

X が 55 以上である確率　　X が 45 以上で 60以下である確率

考え方

$Z = (X - 50)/10$ と変換すると，正規分布の性質1から，
X は標準正規分布 $N(0,1)$ にしたがう

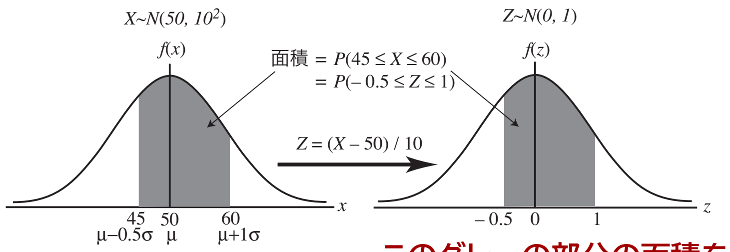
正規分布にもとづく計算

「問題例」の2

$X = 45$ のとき　$Z = (45 - 50)/10 = -0.5$

$X = 60$ のとき　$Z = (60 - 50)/10 = 1$

よって $P(45 \leqq X \leqq 60) = P(-0.5 \leqq Z \leqq 1)$



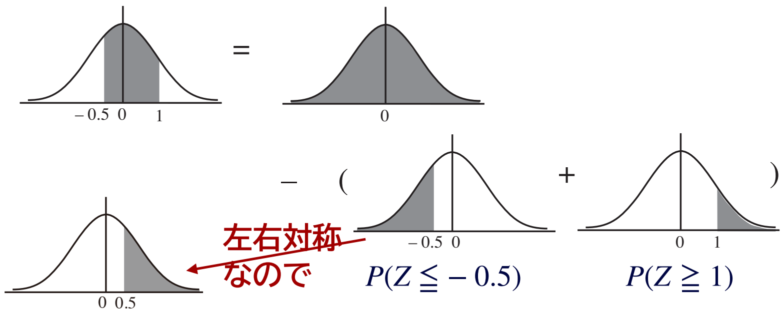
このグレーの部分の面積を
どうやって求める？

正規分布にもとづく計算

「問題例」の2

パズルをおこなう

$P(-0.5 \leqq Z \leqq 1)$　　　1



$= P(Z \geqq 0.5)$