

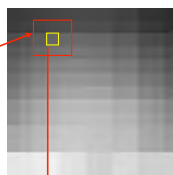
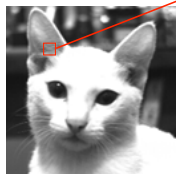
2021年度秋学期 画像情報処理 第2回
結像と空間周波数, フーリエ級数

浅野 晃
関西大学総合情報学部



第1部のトピック

標本化と量子化



60 60 60
65 65 65
70 70 70

画像は, 離散的な点(画素, pixel)の集まりでできている
[標本化]

各画素は, 明るさ(輝度)を表す
整数である
[量子化]

空間周波数とフーリエ変換

標本化(サンプリング)・・・どのくらいの細かさで?
[空間周波数]

空間周波数を求めるのが
[フーリエ変換]

光による画像の生成

波の性質・回折と干渉

中国・銭塘江の「大海嘯」

こちらで見てみましょう

https://www2.nhk.or.jp/archives/tv60bin/detail/index.cgi?das_id=D0009010616_00000

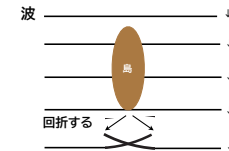
(ウェブサイトの「参考リンク」で、NHKアーカイブスのプレビューをご覧ください。最後のほうに、右の図のような交差する波が映ります)

波の「干渉」

山どうし・谷どうしが
重なり合うと強めあう

波の「回折」

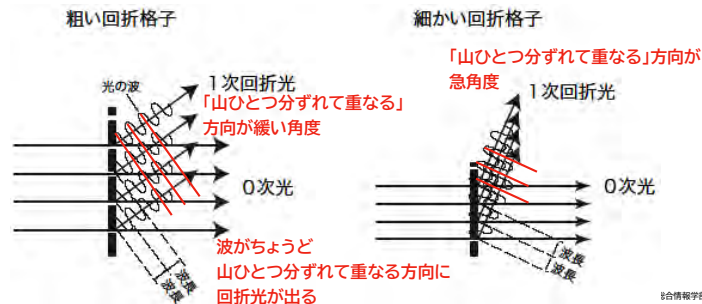
島の裏側に
回り込む



回折格子と1次回折光

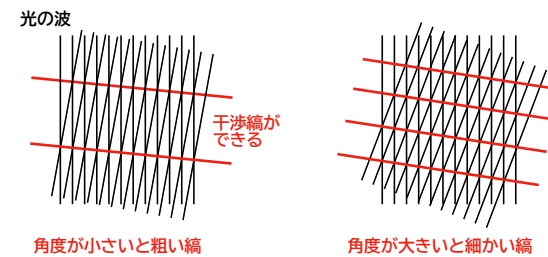
回折によって光が全方向に飛び散る
周期的に重なった方向の光だけが
強め合う

細かい格子ほど
大きな角度で回折光が出る



光の干渉

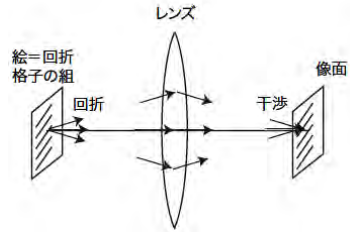
回折光と0次光が重なると再び縞ができる
細かい格子ほど大きな角度で回折光が出るから、



格子が再現される

画像の生成(結像)

画像は回折格子の重ね合わせであり、
それぞれの回折格子で回折された光が像面で干渉して、画像が再現される

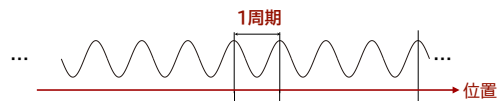


画像は回折格子, すなわち波の重ね合わせである
どんな波が重ね合わされているかを求める計算が[フーリエ変換]

空間周波数とフーリエ級数

波の周波数と波長

基本的な波
三角関数で表す



[周波数]

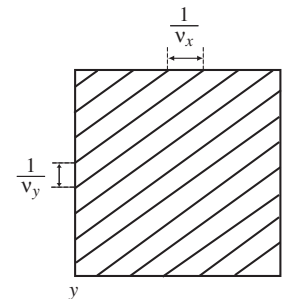
単位長さ(1mmとか)の間に
何周期の波が入っているか

[波長]

波が1周期進むのにかかる
長さはどれだけか

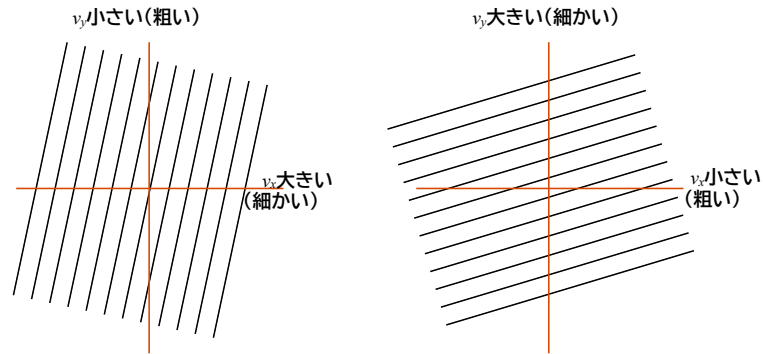


空間周波数 =
平面上の「明暗の波」の細かさを表す
単位長さの中で明暗が何回繰り返すか



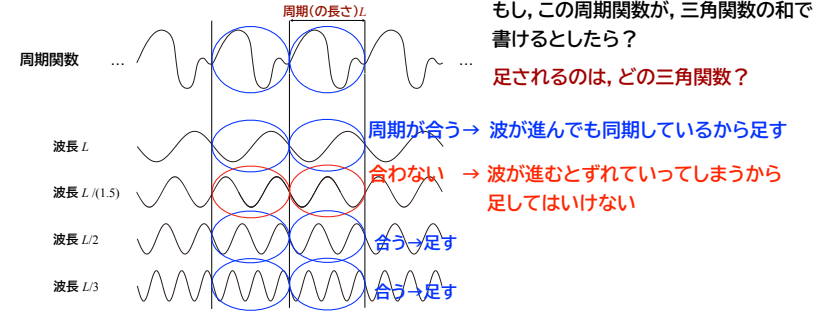
x方向・y方向の2つの空間周波数の組で、
ひとつの平面上の波が定まる

空間周波数



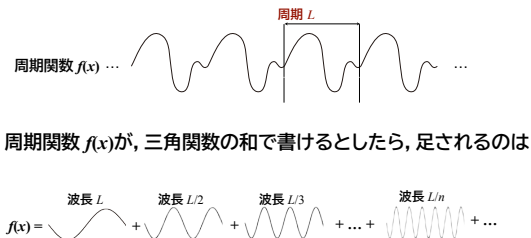
周期関数を分解

ここからは1次元の波で考える



… 足されるのは波長 L/n (n は整数)のものに限る。
無限個の波の足し合わせだが、足し算(級数)で書ける。

「無限個だが、足し算で書ける」



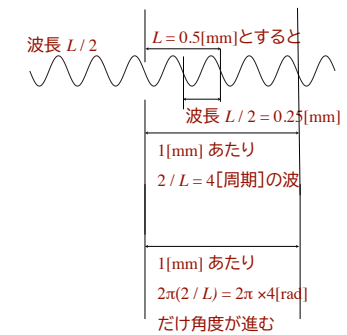
… 足されるのは波長 L/n (n は整数)のものに限るから、無限個の三角関数を足すのだけれども、このように「項」を並べることができる

「級数」という

波の進み方を「角度」で表す

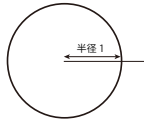
★三角関数を使うときは、角度を単位にしなければいけない

- L/n 波長
- n/L 単位長さあたり何周期ぶんの波が入っているか [周波数]
- $2\pi(n/L)$ 単位長さあたり位相(角度)が何ラジアン進むか [角周波数]
- 1周=360度=2πラジアン

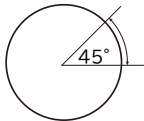


ラジアン？

ラジアン(弧度法)



半径1の円の
円周の長さは 2π



この角度を、
対応する円周の長さで表す

$45^\circ = 1$ 周の $1/8$ だから、
ラジアンであらわすと
 $2\pi \times (1/8) = \pi/4$ (rad)

1周 = 360 度 = 2π ラジアン

周期関数 = 三角関数の級数

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos(2\pi \frac{1}{L} x) + a_2 \cos(2\pi \frac{2}{L} x) + \dots + a_n \cos(2\pi \frac{n}{L} x) + \dots$$

波長 L 波長 $L/2$ 波長 L/n

なのですが...

三角関数は計算が面倒。

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} \{ \cos(x+y) + \cos(x-y) \}$$

指数関数なら計算が簡単

$$a^x a^y = a^{x+y} \quad \text{かけ算 = 指数の足し算}$$

三角関数と指数関数の関係

$i^2 = -1$ 虚数単位

オイラーの式 $\exp(i\omega) = \cos \omega + i \sin \omega$

$$\cos \omega = \frac{\exp(i\omega) + \exp(-i\omega)}{2}, \quad \sin \omega = \frac{\exp(i\omega) - \exp(-i\omega)}{2i}$$

$$\exp(x) = e^x \quad (e^x)' = e^x \quad \text{微分しても変わらない}$$

$e = 2.71828\dots$

ひとつの三角関数 = 波は、
正負の周波数をもつ指数関数の組で表される

「周波数がマイナス」というのはヘンだが、
プラスの周波数とマイナスの周波数のペアでひとつの波になる

つづきは

波長 L/n の波は $\exp(i2\pi \frac{n}{L} x)$ と $\exp(-i2\pi \frac{n}{L} x)$ の組

周期 L の周期関数 $f(x)$ は、波長 L/n の波を足し合わせて

プラスもマイナスも ∞ (プラスとマイナスの組で1つの波だから)

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L} x\right)$$

これがフーリエ級数なんですが、
この係数はどうやって求めるの？
という級数で書けるはず。

続きは次回。