

## フーリエ級数

## 波の重ね合わせと級数

前回、波を指数関数で表すことを説明しました。これは、三角関数と指数関数の間にある

$$\cos \theta = \frac{\exp(i\theta) + \exp(-i\theta)}{2} \quad (1)$$

という関係を用います。ここで、 $i\theta$  と  $-i\theta$  のような関係の複素数の組を**複素共役**といいます。

このことから、「ひとつのコサイン関数で表される波は、指数関数を用いるときは、正負の2つの周波数の組で表現される」という関係が得られます。これを用いると、「関数  $f(x)$  を波の重ね合わせで表す」ことは、 $f(x)$  を次のような級数で表すことにあたります。

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L} x\right) \quad (2)$$

これを「 $f(x)$  を次のような級数で表すことができる」というためには、それぞれの波、すなわち  $\exp\left(i2\pi \frac{n}{L} x\right)$  にかかっている、係数  $a_n$  を求める方法が必要です。係数の求めるには、**直交関数系**という考え方を利用します。

## 内積と直交関数系

さて、上の指数関数には、「同じ基本周期の波をかけあわせて、周期  $L$  にわたって積分したときは0にならず、異なる基本周期の波をかけあわせて積分すると0になる」という性質があります。なぜならば、この積分は、 $m, n$  を整数として

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \exp\left(i2\pi \frac{m}{L} x\right) \exp\left(-i2\pi \frac{n}{L} x\right) dx = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \exp\left(i2\pi \frac{m-n}{L} x\right) dx \quad (3)$$

と表され<sup>1</sup>、 $m \neq n$  のときは、この積分は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{i2\pi \frac{m-n}{L}} \left[ \exp\left(i2\pi \frac{m-n}{L} x\right) \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \\ &= \frac{1}{i2\pi \frac{m-n}{L}} \left\{ \exp\left(i2\pi \frac{m-n}{L} \frac{L}{2}\right) - \exp\left(-i2\pi \frac{m-n}{L} \frac{L}{2}\right) \right\} \\ &= \frac{L}{m-n} \sin \pi(m-n)L = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

であり、 $m = n$  のときは

<sup>1</sup> $\exp\left(-i2\pi \frac{n}{L} x\right)$  のほうの  $i$  の前に  $-$  がついているのは、複素共役をとっているためです。

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \exp(0) dx = [x]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = L \quad (5)$$

となるからです。この積分を2つの波の**内積**とよびます。また、このような性質をもつ関数のグループを**直交関数系**とよびます。直交関数系については、第2部で画像情報圧縮について説明するときに、再び取り扱います。

### 級数の各項の係数は？

さて、関数  $f(x)$  と上の指数関数を使って、次の計算をしてみましょう。 $k$  は整数とします。

$$\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \exp\left(-i2\pi \frac{k}{L} x\right) dx \quad (6)$$

$f(x)$  は (9) 式の級数で表されますから、上の積分は

$$\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L} x\right) \exp\left(-i2\pi \frac{k}{L} x\right) dx \quad (7)$$

となりますが、上で示した直交性から、級数のうち周期が  $k/L$  の項以外は積分すれば0であり、その結果、(6) 式の積分は

$$\frac{1}{L} \cdot L a_k = a_k \quad (8)$$

となります。このことは、関数  $f(x)$  を (9) 式の級数による波の足し合わせで表したとき、それぞれの波の係数は (6) 式で求められることを表しています。(9) 式の級数を、関数  $f(x)$  の**フーリエ級数展開**とよび、(6) 式で求められる係数を、周期  $L/k$  の波の**フーリエ係数**とよびます。

## フーリエ変換

### 周期関数でない場合は、波の足し合わせで書けるのか

前回は、周期関数を三角関数（虚数指数の指数関数）の級数、すなわち「波の足し合わせ」で表したフーリエ級数について説明しました。では、元の関数が、周期関数でない一般の関数のときは、どうなるのでしょうか。

この場合は、「周期が無限大である」と考えます。すなわち、前回の例では、周期関数  $f(x)$  の周期を  $L$  としましたが、今回は  $L \rightarrow \infty$  となったときの極限を考えます。

(2) 式で示したフーリエ級数の式

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L} x\right) \quad (9)$$

は、関数  $f(x)$  が基本周期が  $L, L/2, L/3, \dots, L/n, \dots$  の波の足し合わせであることを示しています。こ

ここで  $L$  が大きくなると、 $n/L$  と  $(n+1)/L$  の差  $1/L$  は小さくなります。このことは、 $f(x)$  をフーリエ級数で表したとき、隣り合う波の周波数の差は小さくなってゆくことを示しています。

### 隣り合う波の周波数の差 $\rightarrow 0$ のとき、「足し算」は「積分」へ

そこで、この周波数の差  $1/L$  を  $\Delta\nu$  で表すことにします。このとき、上のフーリエ級数の式と、(eqn:fourierseries01) 式で示したフーリエ係数の式

$$\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \exp\left(-i2\pi \frac{n}{L} x\right) dx \quad (10)$$

をあわせると、上の  $\Delta\nu$  を使って

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \Delta\nu \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(\tau) \exp(-i2\pi n \Delta\nu \tau) d\tau \right) \exp(i2\pi n \Delta\nu x) \quad (11)$$

となります。 $n\Delta\nu$  は、(周波数の差)  $\times$  (項の個数) ですからある周波数をさします。これを、周波数  $\nu$  で表します。また、 $L \rightarrow \infty$  のとき  $\Delta\nu \rightarrow 0$  ですから、 $\Delta\nu$  を含む総和は、 $d\nu$  を含む積分になります。よって、

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-i2\pi\nu\tau) d\tau \right) \exp(i2\pi\nu x) d\nu \quad (12)$$

が得られます。

### フーリエ変換

これを、

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i2\pi\nu x) dx \quad (13)$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) \exp(i2\pi x \nu) d\nu \quad (14)$$

のように分けて表すとき、式 (13) を**フーリエ変換** (Fourier transformation)、式 (14) を**逆フーリエ変換** (inverse Fourier transformation) とよびます。関数  $F(\nu)$  は、もとの関数  $f(x)$  に、どのような周波数の波がどの程度含まれているかを表しています。上で述べたように、フーリエ級数において  $L \rightarrow \infty$  としたので、級数で隣接する波の間隔が  $0$  に近づいていきます。したがって、フーリエ係数の並び  $\{a_k\}$  は、ついに連続関数  $F(\nu)$  に達するわけです。 $f(x)$  が存在する空間を**実空間**、 $F(\nu)$  が存在する空間を**周波数空間**とよびます。また、 $f(x)$  と  $F(\nu)$  を**フーリエ変換対**とよびます。

### 2次元の波の場合

ここまでは1次元の関数の話をしてきましたが、画像のような2次元の関数のフーリエ変換は、

$$F(\nu_x, \nu_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp\{-i2\pi(\nu_x x + \nu_y y)\} dx dy \quad (15)$$

となります。この場合の、2次元の周波数  $(\nu_x, \nu_y)$  が、前回説明した空間周波数です。

---

## 参考文献

H. P. Hsu (佐藤平八訳), フーリエ解析, 森北出版, 978-4627930100

なお、参考書では周波数  $\nu$  のかわりに角周波数  $\omega = 2\pi\nu$  を使って説明されていることも多く、その場合係数等が違っていることに注意してください。また、フーリエ変換と逆フーリエ変換につく係数も表現のしかたによって違ってきます。