

サンプリングとサンプリング定理

連続的な明度分布からデジタル画像を生成するためには、連続的な明度分布から一定間隔で明度を取り出す作業を行う必要があります。これを**サンプリング** (sampling, 標本化) といいます (図1)。

どのくらい細かくサンプリングすればいいのか

このとき、間隔をある程度より細かくすれば、サンプリングされた画像から元の連続的な明度分布を再現することができます。この「最小限の細かさ」はいくらなのかを表す**サンプリング定理** (sampling theorem) について、この節でみてみましょう。

ここでも、簡単のため画像を1次元の関数として考えます。画像中の位置 x に対して、その位置の明度が関数 $f(x)$ で与えられているとします。

くし形関数

もとの関数 $f(x)$ を周期 T でサンプリングした関数 $f_T(x)$ は、 $f(x)$ に次式で表される周期 T の**くし型関数** (comb function)

$$\text{comb}_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nT) \quad (1)$$

をかけたもの、すなわち

$$f_T(x) = f(x)\text{comb}_T(x) \quad (2)$$

として表されます (図2)。ここで、 $\delta(x)$ は**ディラックのデルタ関数** (Dirac's delta function) とよばれるもので、

$$\delta(x) = 0 \quad (x \neq 0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (3)$$

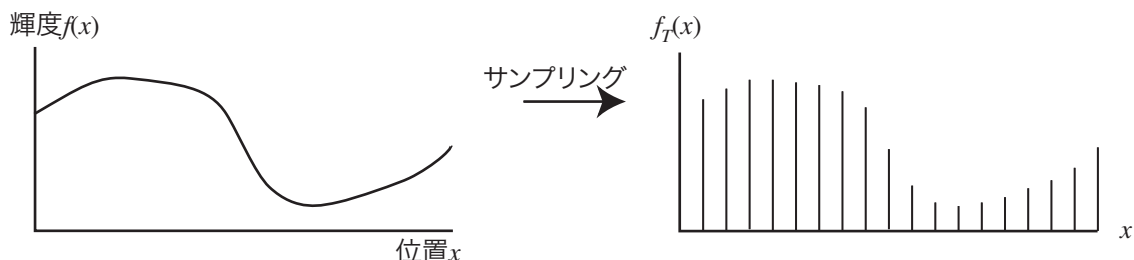


図1: サンプリング

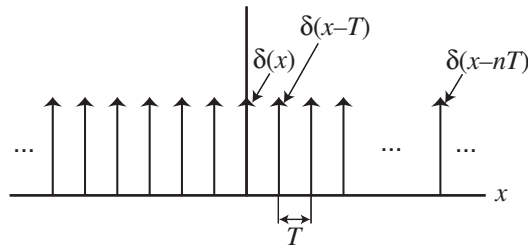


図 2: くし形関数

というものです。簡単にいえば、「積分すると 1 になるような、幅 0 のピーク（インパルス）」です。したがって、くし形関数は「インパルスが等間隔に無限に並んだもの」となります。

なぜ、くし形関数が必要なのか

ところで、サンプリングを行うのに、デルタ関数を並べたくし形関数の代わりに

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases} \quad (4)$$

という関数を並べたものを用いてはいけないのでしょうか？

それはだめです。(4) 式の関数は、幅がゼロなので、積分するとゼロです。したがって、この関数を並べて元の関数にかけると、それも積分するとゼロです。つまり、画面全体の明るさの合計がゼロになってしまうわけで、これはおかしいです。デルタ関数は、幅がゼロなのに、積分すると 0 でなく 1 という、きわめて奇妙な関数（正式には超関数）なのです。

サンプリングしてからフーリエ変換すると

かけ算とフーリエ変換

さて、サンプリングされた画像 $f_T(x)$ がとる空間周波数の範囲を調べるため、 $f_T(x)$ のフーリエ変換がどうなるかを調べてみましょう。ここで、2つの関数の積のフーリエ変換についての次のような定理を用います。

$$FT[f(x)g(x)](\nu) = FT[f(x)](\nu) * FT[g(x)](\nu) \quad (5)$$

ここで、 $FT[f(x)]$ は関数 $f(x)$ のフーリエ変換を表します。

コンヴォリューション

また、記号「*」はコンヴォリューション（convolution, 畳み込み積分）という演算で、

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(t-y)dy \quad (6)$$

と定義されます。つまり、かけ算のフーリエ変換は、フーリエ変換のコンヴォリューションとなります

(証明は付録1を見てください)。

くし形関数のフーリエ変換

これを使って(2)式のフーリエ変換を求めると、

$$FT[f_T(x)](\nu) = FT[f(x)](\nu) * FT[\text{comb}_T(x)](\nu) \quad (7)$$

となります。この式の右辺第1項は、元の関数 $f(x)$ のフーリエ変換です。第2項はくし形関数のフーリエ変換ですが、実は

$$FT[\text{comb}_T(x)](\nu) = \frac{1}{T} \text{comb}_{1/T}(\nu) \quad (8)$$

となります(証明の概略は付録2を見てください)。つまり、**くし形関数のフーリエ変換はくし形関数**で、また、もとのくし形関数の周期と周波数空間でのくし形関数の周期は、反比例することがわかります。したがって、

$$FT[f_T(x)](\nu) = \frac{1}{T} \{FT[f(x)](\nu) * \text{comb}_{1/T}(\nu)\} \quad (9)$$

となります。

くし形関数とのコンヴォリューション

さて、「くし形関数とのコンヴォリューション」とは何でしょうか？ これを考えるため、まず「デルタ関数とのコンヴォリューション」を考えてみましょう。(6)式から、

$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta(t-y)dy \quad (10)$$

となります。(10)式の右辺では y が $-\infty$ から ∞ まで動くわけですが、 $t=y$ のとき以外は $\delta(t-y)=0$ ですから、 $f(y)\delta(t-y)$ の積分への寄与は0です。よって、

$$\begin{aligned} f(t) * \delta(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta(t-y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta(t-t)dy \\ &= f(t) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(0)dy = f(t) \end{aligned} \quad (11)$$

となり、**ある関数とデルタ関数とのコンヴォリューションは、その関数自身**になります。

つまり、サンプリングしてからフーリエ変換すると

くし形関数はデルタ関数が一定間隔で並んだものですから、「ある関数とくし形関数とのコンヴォリューションは、ある関数全体が一定間隔で並んだもの」になります。したがって、(9)式は、**元の明度分布**

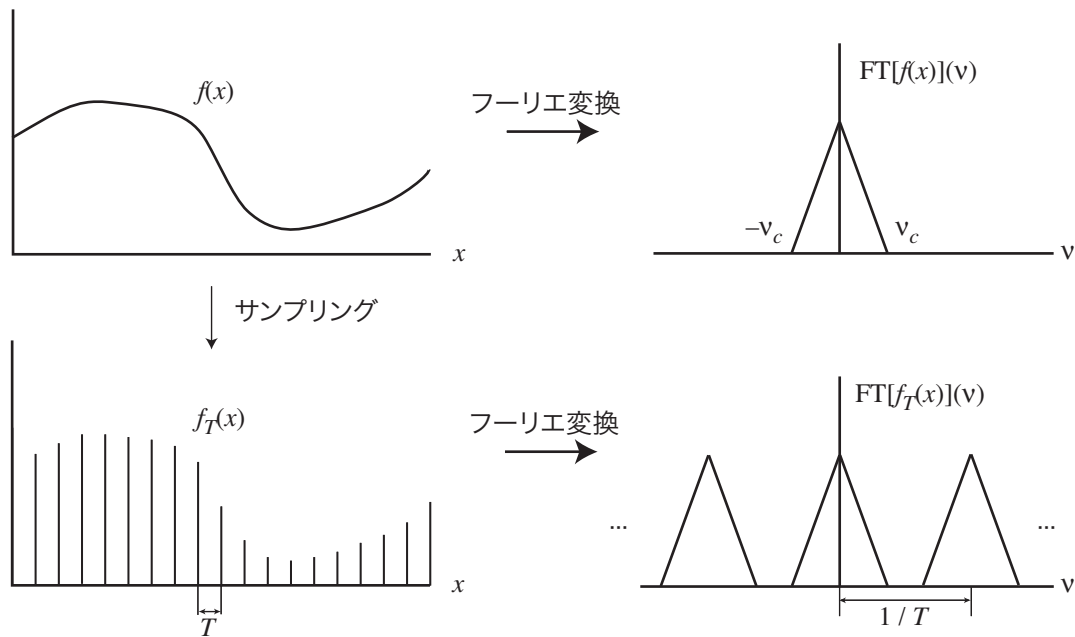


図 3: サンプリングとフーリエ変換

$f(x)$ を周期 T でサンプリングした $f_T(x)$ をフーリエ変換すると、元の明度分布 $f(x)$ をフーリエ変換した $FT[f(x)]$ が周期 $1/T$ で無限に並んだものになることを意味しています。これを図で表したものが図 3 です。ここで ν_c は**カットオフ周波数** (cutoff frequency) とよばれ、元の明度分布 $f(x)$ がもつ最大の周波数を意味します。 $f(x)$ が実関数の場合、周波数 ν でフーリエ変換 $FT[f(x)]$ が 0 でないときには、周波数 $-\nu$ でもフーリエ変換は 0 でない¹ので、 $FT[f(x)]$ の成分は $-\nu_c$ から ν_c の範囲に存在します。

さて、どのくらい細かくサンプリングすればいいのか

さて、図 4(a) のように、周波数空間でくし形関数の間隔が十分広い場合は、隣りあう $FT[f(x)]$ どうしは重なりません。そこで、サンプリングされた $f_T(x)$ をフーリエ変換した $FT[f_T(x)]$ から、周波数空間で幅 $1/T$ の部分を切り出すと、元の関数のフーリエ変換が取り出されます。すなわち、画像でいえば、もとの画像の明度分布の情報はサンプリングによって失われないことがわかります。これに対して、図 4(b) のように周波数空間でくし形関数の間隔が狭い場合は、隣りあう $FT[f(x)]$ どうしが重なってしまい、周波数空間で幅 $1/T$ の部分を取り出しても元の画像の明度分布のフーリエ変換をとりだすことはできず、誤った関数をとりだしてしまいます。この現象を**エイリアジング** (aliasing, 異名効果) といいます。

元の $FT[f(x)]$ は $-\nu_c$ から ν_c の範囲に存在しますから、図 4(a) のように隣りあう $FT[f(x)]$ 同士が重ならないようにするには、間隔 $1/T$ が $2\nu_c$ 以上であればよいことになります。 T はサンプリングの間隔ですから、 $1/T$ は単位長さあたりのサンプリングの回数、すなわちサンプリングの細かさを表します。つまり、**元の明度分布のもつ最大の周波数の 2 倍より細かくサンプリングすれば、元の明度分布をサンプリングされたデジタル画像から再現できる**ことがわかります。これが、この節の最初に述べたサンプリング定理です。

身近な例でいえば、(空間周波数ではなく時間周波数の話になりますが) 音楽用コンパクトディスク

¹ $f(x)$ が実関数のとき、そのフーリエ変換の振幅 (絶対値) は偶関数に、位相は奇関数になります。

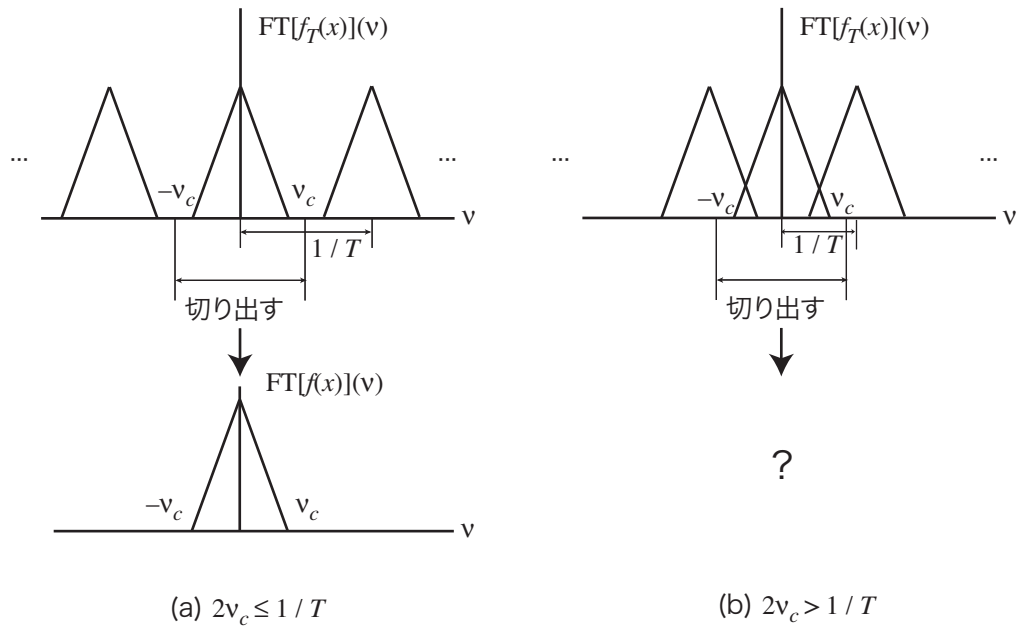


図 4: サンプリング定理

(CD) ではサンプリング周波数は 44.1kHz で、すなわち毎秒 44100 回の細かさでサンプリングを行っています。したがって、音楽 CD で再生できる最高の周波数は 22.05kHz です。ですから、音源をサンプリングする前に、22.05kHz 以上の周波数の音が入らないようにフィルタリングをしておかないと、再生のさいエイリアジングを起こしてしまいます。

付録 1. コンヴォリューションとフーリエ変換

実空間の関数 f, g のフーリエ変換をそれぞれ F, G とすると、逆フーリエ変換の式

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) \exp(i2\pi x\nu) d\nu \tag{A1}$$

から、

$$\begin{aligned} & f(x)g(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) \exp(i2\pi\nu x) d\nu \int_{-\infty}^{\infty} G(\mu) \exp(i2\pi\mu x) d\mu \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)G(\mu) d\nu \exp(i2\pi(\nu + \mu)x) d\mu \end{aligned} \tag{A2}$$

となります。ここで $\nu + \mu = \xi$ と変数変換すると

$$\begin{aligned}
f(x)g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)G(\xi - \nu)d\nu \exp(i2\pi\xi x)d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [F * G](\xi) \exp(i2\pi\xi x)d\xi \\
&= FT^{-1}[F * G](x)
\end{aligned} \tag{A3}$$

となるので、(A3) 式の逆変換を考えると (5) 式が得られます。

付録 2. くし形関数のフーリエ変換 (概略)

(1) 式のくし形関数 $\text{comb}_T(x)$ の定義から、 $\text{comb}_T(x)$ は周期 T の周期関数であることがわかります。周期 T の周期関数は、周波数が $1/T$ の整数倍である正弦波の級数、すなわち

$$\text{comb}_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(i2\pi \frac{n}{T}x) \tag{A4}$$

で表されます (n は整数)。周波数 n/T の係数 a_n は、直交関数系の性質から $\exp(-i2\pi \frac{n}{T}x)$ をかけて積分すれば求まります。このとき積分区間は $-\infty$ から ∞ ではなく、周期 T の周期関数ですから $-T/2$ から $T/2$ になります。また正規化のために係数 $1/T$ をかけます。すると、

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \text{comb}_T(x) \exp(-i2\pi \frac{n}{T}x) dx \\
&= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(x) \exp(-i2\pi \frac{n}{T}x) dx \\
&= \frac{1}{T} \exp(-i2\pi \frac{n}{T} \cdot 0) = \frac{1}{T}
\end{aligned} \tag{A5}$$

となりますから、

$$\text{comb}_T(x) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(i2\pi \frac{n}{T}x) \tag{A6}$$

となります。よって、そのフーリエ変換は

$$FT[\text{comb}_T(x)](\nu) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} FT[\exp(i2\pi \frac{n}{T}x)](\nu) \tag{A7}$$

となります。ここで、前回の説明にあったように、 $\exp(i2\pi \frac{n}{T}x)$ をフーリエ変換すると周波数空間で $\nu = n/T$ のところにピークがたつわけですから、(A7) 式から

$$\begin{aligned} FT[\text{comb}_T(x)](\nu) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right) \\ &= \frac{1}{T} \text{comb}_{1/T}(\nu) \end{aligned} \tag{A8}$$

が得られます。