

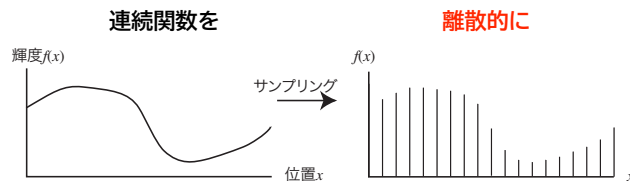
2021年度秋学期 画像情報処理 第4回  
フーリエ変換とサンプリング定理

浅野 晃  
関西大学総合情報学部



## サンプリングとサンプリング定理 🤔

## サンプリングとサンプリング定理



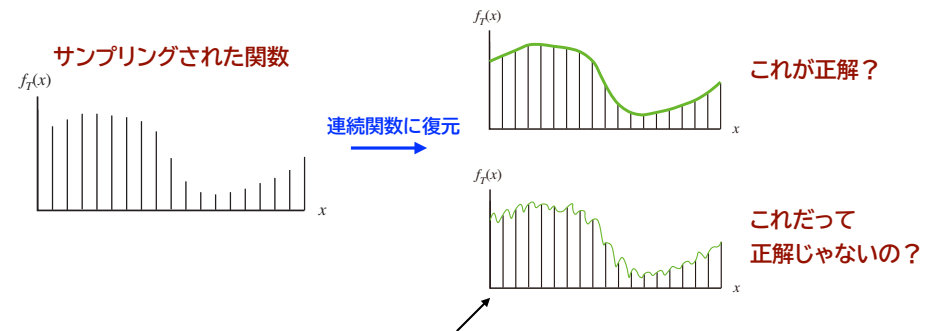
### サンプリング定理

ある程度細かい間隔でサンプリングすれば、もとの連続関数に戻せる

どのくらい細くしなければならないかは、  
もとの関数に含まれる**最高の周波数**による

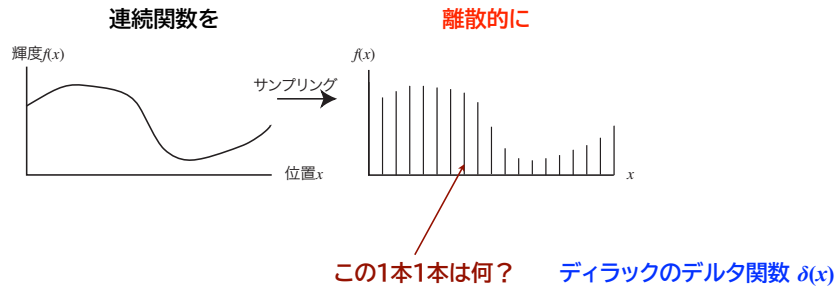
「細かい」関数は  
**細かくサンプリング**

## サンプリング定理・直観的には



もしこのような細かい動きが正解だとすれば、  
細かい動きをとらえるにはサンプリングが粗すぎる、つまり  
元の連続関数の**最高の周波数**に対して**十分細かくサンプリング**されていない

## サンプリングとは



## ディラックのデルタ関数 $\delta(x)$

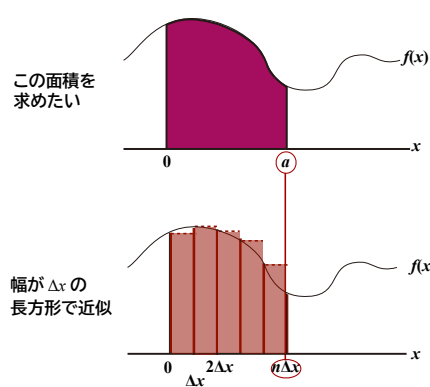
$x = 0$  の1点以外すべてゼロ

$$\delta(x) = 0 \quad (x \neq 0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

$x = 0$  をはさんで積分すると1

何ですかこれ?? 😊

## 積分って何でしたっけ



しかし、デルタ関数は  
1点以外すべてゼロで幅はないから  
面積もないはず...

短冊の面積の合計

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k\Delta x) \Delta x$$

$\Delta x \rightarrow 0$  区切りを無限に細かく

$$\int_0^a f(x) dx \quad \text{これが積分}$$

## ディラックのデルタ関数 $\delta(x)$

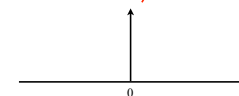
$x = 0$  の1点以外すべてゼロ

$$\delta(x) = 0 \quad (x \neq 0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

$x = 0$  をはさんで積分すると1

高さは、何だともいえない (「無限」でもない。なぜなら  $\int_{-\infty}^{\infty} k\delta(x) dx = k$ )

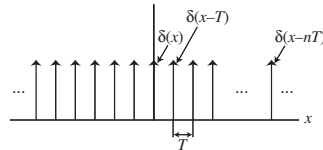
幅はなくても面積はあるんです。  
だから、こんな「↑」で表さざるを得ない



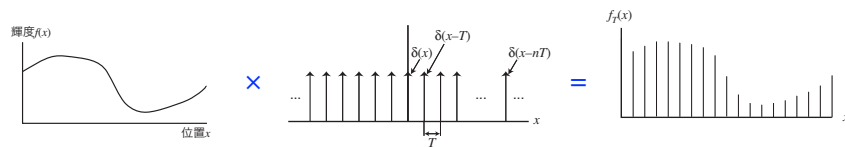
## くし形関数 $\text{comb}_T(x)$ とサンプリング

くし形関数  $\text{comb}_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nT)$

デルタ関数を等間隔に並べたもの



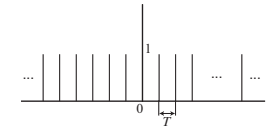
サンプリングとは、くし形関数とのかけ算  $f_T(x) = f(x)\text{comb}_T(x)$



## こんなややこしい関数でなければいけないの？

ディラックのデルタ関数ではなく、「縦棒」を並べて、くし形関数にしてはだめ？

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$



だめです 🤖

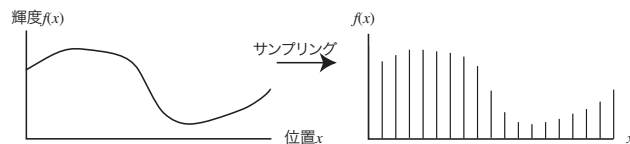
縦棒の関数は、幅がなくて高さ1だから、積分したらゼロ

→画像の輝度の合計がゼロのはずはない

ディラックのデルタ関数は、幅がないのに積分したら1 というヘンな関数(超関数)

※ただ、こういうややこしい話になっているのは、「積分」をもとに考えを進めているからでもあります。  
そのあたりは、次回の「離散フーリエ変換」で説明します。

## サンプリングされたら、周波数の範囲は？



周波数がある範囲におさまっているとき

サンプリングした後の周波数の範囲は？

サンプリングされた関数である  $f_T(x)$  のフーリエ変換を求める

$$f_T(x) = f(x)\text{comb}_T(x)$$

2つの関数のかけ算のフーリエ変換は？

## かけ算のフーリエ変換

こうなります

$$FT[f(x)g(x)](\nu) = FT[f(x)](\nu) * FT[g(x)](\nu)$$

かけ算のフーリエ変換

フーリエ変換と

フーリエ変換の

???

\*は、コンヴォリューション(畳み込み)といいます

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(t-y)dy$$

その意味は、少し後で...

## サンプリングされた関数のフーリエ変換

つまり

$$FT[f_T(x)](\nu) = FT[f(x)](\nu) * FT[\text{comb}_T(x)](\nu)$$

サンプリングされた関数のフーリエ変換は    もとの関数のフーリエ変換と    くし形関数のフーリエ変換の    コンヴォリューション

くし形関数のフーリエ変換は

$$FT[\text{comb}_T(x)](\nu) = \frac{1}{T} \text{comb}_{1/T}(\nu)$$

くし形関数のフーリエ変換はくし形関数, ただし間隔が逆数

## くし形関数とのコンヴォリューション

$$FT[f_T(x)](\nu) = FT[f(x)](\nu) * FT[\text{comb}_T(x)](\nu)$$

サンプリングされた関数のフーリエ変換は    もとの関数のフーリエ変換と    くし形関数のフーリエ変換の    コンヴォリューション

「くし形関数とのコンヴォリューション」とは？

「デルタ関数とのコンヴォリューション」を並べたもの

## デルタ関数とのコンヴォリューション

$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \delta(t-y) dy$$

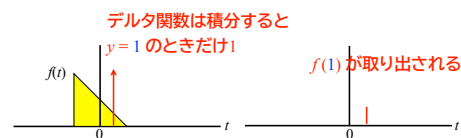
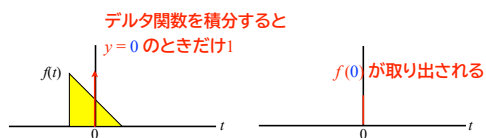
デルタ関数はここが0のとき以外はゼロ → 積分してもゼロ

$$t=0 \text{ のとき } f(t) * \delta(t)|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \delta(-y) dy$$

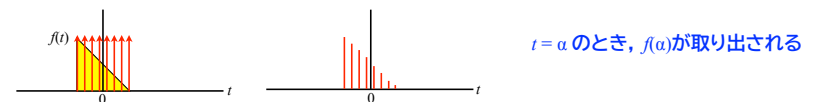
$y=0$  のとき以外は積分に無関係

$$t=1 \text{ のとき } f(t) * \delta(t)|_{t=1} = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \delta(1-y) dy$$

$y=1$  のとき以外は積分に無関係

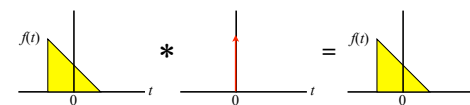


## デルタ関数とのコンヴォリューション

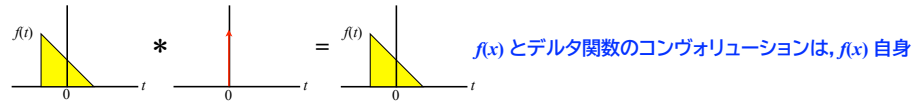


つまり

$f(x)$  とデルタ関数のコンヴォリューションは,  $f(x)$  自身

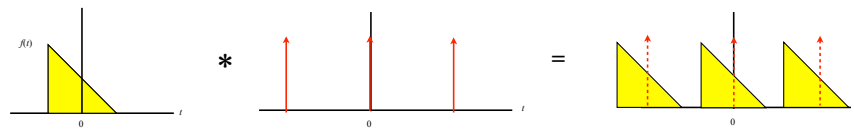


## くし形関数とのコンヴォリューション

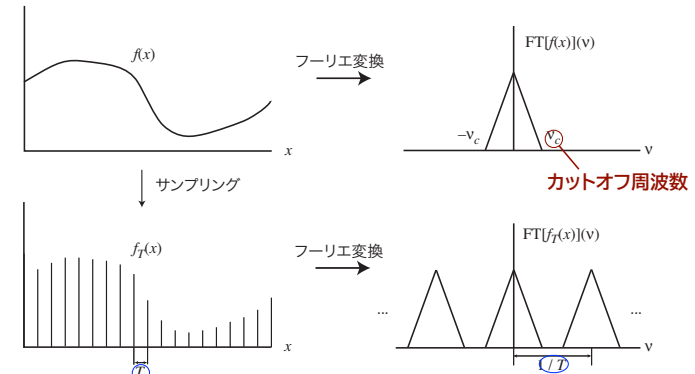


くし形関数は, デルタ関数が等間隔に並んでいる

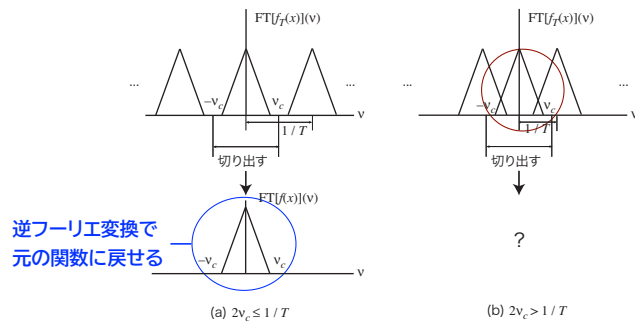
くし形関数とのコンヴォリューションは, 元の関数の「コピー」が等間隔に並んだものになる



## まとめと・サンプリングとフーリエ変換



## 周波数空間での間隔



サンプリング間隔が, カットオフ周波数に比べて十分に細かければ

サンプリング間隔が粗いと, 周波数空間で重なり合ってしまう元には戻せない (エイリアジング)

## まとめ・サンプリング定理

ある関数(画像でも, 音声でも)を, そのもつ最大の周波数の2倍以上の細かさでサンプリングしておけば,

サンプリングされたもの(デジタル画像, デジタル音声)から元の関数(画像や音声)を再現できる

例)CDはサンプリング周波数が44.1kHz

→22.05kHzまでの音声記録できる

(録音時に, それ以上の周波数の成分が入らないようにしなければならない)