2021年度秋学期 画像情報処理　第5回

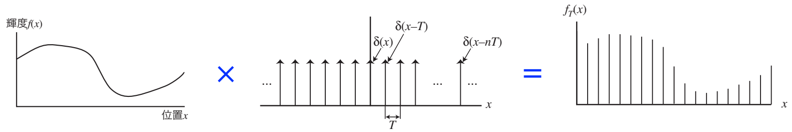
離散フーリエ変換，フーリエ変換の実例

浅野 晃
関西大学総合情報学部

離散フーリエ変換🤔

サンプリングされた関数のフーリエ変換

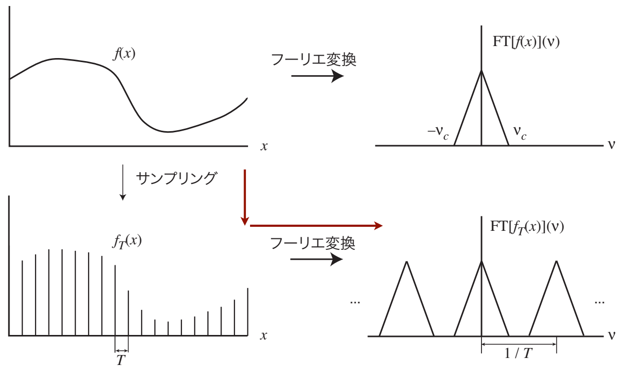
サンプリング　$f_T(x) = f(x)\mathrm{comb}_T(x)$



サンプリングされた関数のフーリエ変換

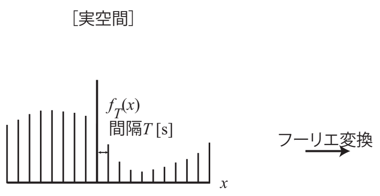
$$FT[f_T(x)](\nu) = FT[f(x)\mathrm{comb}_T(x)](\nu)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{comb}_T(x)\exp(-i2\pi\nu x)dx$$

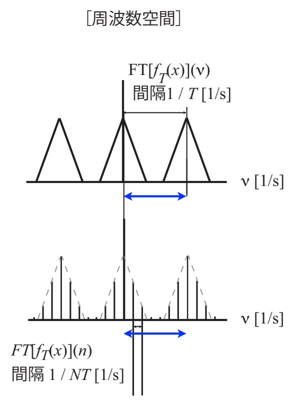
サンプリングされた関数のフーリエ変換



こちらは離散的だが　　こちらは離散的でない→コンピュータで扱えない

周波数空間でもサンプリング





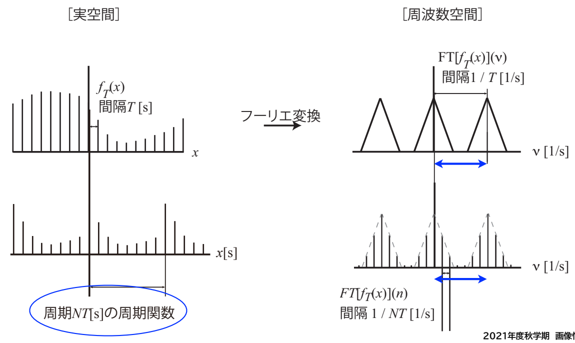
周波数空間で, 1周期あたり

N 点のサンプリングをする

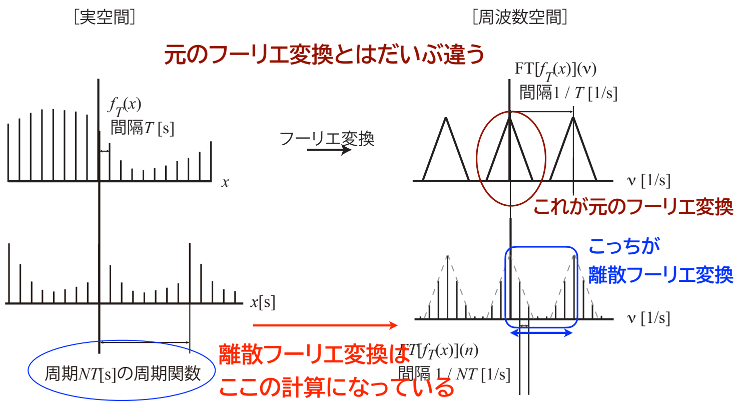
実空間ではどうなる？

実空間でサンプリング→周波数空間で周期的に現れる

周波数空間でサンプリング→実空間で周期的に現れる



離散フーリエ変換



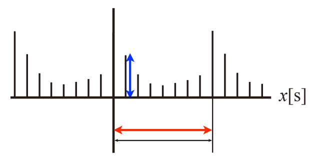
数列の計算にする

元の関数は忘れて, サンプリングされたものを数列とみなす

$$u(n) = f_T(nT)$$

デルタ関数の並びを積分

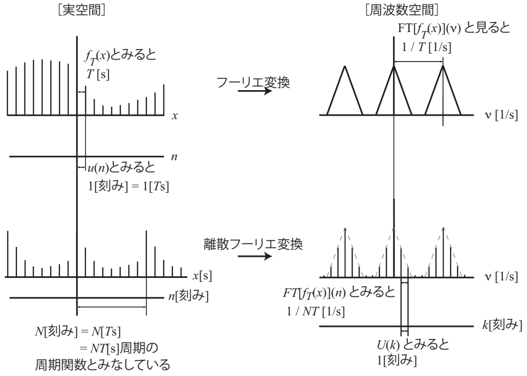
→離散の場合は, そこの値を合計するだけ



離散フーリエ変換（DFT）

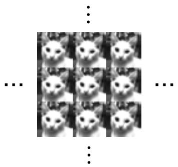
$$U(k) = \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \exp\left(-i2\pi \frac{k}{N} n\right) \quad (k = 0, 1, \ldots, N-1)$$

離散フーリエ変換



 の離散フーリエ変換は

実際には



という
周期関数と
みなしている

フーリエ変換の実例

（MATLABを使って説明します）

高速フーリエ変換について

「高速」フーリエ変換とは

高速フーリエ変換（Fast Fourier Transformation, FFT）

離散フーリエ変換の計算に含まれる掛け算の回数を減らす工夫

コンピュータでは，掛け算は足し算に比べて時間がかかるので
掛け算を減らすと全体の計算にかかる時間を短くできる

例えば

$5 \times 4 + 3 \times 5$　　掛け算は2回

$5 \times (4 + 3)$　　掛け算は1回

離散フーリエ変換と掛け算

今日は，4点だけの信号(N = 4)の離散フーリエ変換について考えます

離散フーリエ変換の式は

$$U(k) = \sum_{n=0}^{3} u(n) \exp\left(-i2\pi\frac{k}{4}n\right) \quad (k = 0, 1, \ldots, 3)$$

ここでは$U(0), U(1), U(2), U(3)$の4つの$U(\ )$を計算する

1つの$U(\ )$を計算するのに，

$u(n) \exp\left(-i2\pi\frac{k}{4}n\right)$ という掛け算を，$n = 0,1,2,3$の4回行う

全部で
$4 \times 4 = 16$回の
掛け算

掛け算を減らすには

$$U(k) = \sum_{n=0}^{3} u(n) \exp\left(-i2\pi\frac{k}{4}n\right) \quad (k = 0, 1, \ldots, 3)$$

この指数関数は，$W \equiv \exp\left(-i\frac{2\pi}{4}\right)$ を使うと $W^{k\times n}$ と表せる

指数関数と三角関数の関係を用いると

$$W^0 = \exp\left(-i2\pi\frac{0}{4}\right) = \cos 0 + i\sin 0 = 1 + 0i = 1$$
$$W^1 = \exp\left(-i2\pi\frac{1}{4}\right) = \cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}) = 0 - i = -i$$
$$W^2 = \exp\left(-i2\pi\frac{2}{4}\right) = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = -1 + 0i = -1$$
$$W^3 = \exp\left(-i2\pi\frac{3}{4}\right) = \cos(-\frac{3\pi}{2}) + i\sin(-\frac{3\pi}{2}) = 0 + i = i$$
$$W^4 = \exp\left(-i2\pi\frac{4}{4}\right) = \cos(-2\pi) + i\sin(-i2\pi) = 1 + 0i = 1$$

指数関数の，くりかえしの性質を使う

前ページの式は

$$W^0 = \exp\left(-i2\pi\frac{0}{4}\right) = \cos 0 + i\sin 0 = 1 + 0i = 1$$
$$W^1 = \exp\left(-i2\pi\frac{1}{4}\right) = \cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}) = 0 - i = -i$$
$$W^2 = \exp\left(-i2\pi\frac{2}{4}\right) = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = -1 + 0i = -1$$
$$W^3 = \exp\left(-i2\pi\frac{3}{4}\right) = \cos(-\frac{3\pi}{2}) + i\sin(-\frac{3\pi}{2}) = 0 + i = i$$
$$W^4 = \exp\left(-i2\pi\frac{4}{4}\right) = \cos(-2\pi) + i\sin(-i2\pi) = 1 + 0i = 1$$

➡

$$W^0 = 1$$
$$W^1 = -i$$
$$W^2 = -1 = -W^0$$
$$W^3 = i = -W^1$$
$$W^4 = 1 = W^0$$

W^0 と W^1 だけで表せる

さらに，指数関数の，くりかえしの性質を使う

前ページの式は

$$W^0 = 1$$
$$W^1 = -i$$
$$W^2 = -1 = -W^0$$
$$W^3 = i = -W^1$$
$$W^4 = 1 = W^0$$

➡

$$W^5 = W^4 \times W^1 = 1 \times W^1 = W^1$$
$$W^6 = W^4 \times W^2 = 1 \times (-W^0) = -W^0$$
$$W^7 = W^4 \times W^3 = 1 \times (-W^1) = -W^1$$
$$W^8 = W^4 \times W^4 = 1 \times W^0 = W^0$$
$$W^9 = W^8 \times W^1 = W^0 \times W^1 = 1 \times W^1 = W^1$$
$$\cdots$$

ずっと，W^0 と W^1 だけで表せる

N = 4の離散フーリエ変換は

N = 4 の離散フーリエ変換は

$$U(0) = u(0)W^{0\times0} + u(1)W^{0\times1} + u(2)W^{0\times2} + u(3)W^{0\times3}$$
$$U(1) = u(0)W^{1\times0} + u(1)W^{1\times1} + u(2)W^{1\times2} + u(3)W^{1\times3}$$
$$U(2) = u(0)W^{2\times0} + u(1)W^{2\times1} + u(2)W^{2\times2} + u(3)W^{2\times3}$$
$$U(3) = u(0)W^{3\times0} + u(1)W^{3\times1} + u(2)W^{3\times2} + u(3)W^{3\times3}$$

つまり

$$U(0) = u(0)W^0 + u(1)W^0 + u(2)W^0 + u(3)W^0$$
$$U(1) = u(0)W^0 + u(1)W^1 + u(2)W^2 + u(3)W^3$$
$$U(2) = u(0)W^0 + u(1)W^2 + u(2)W^4 + u(3)W^6$$
$$U(3) = u(0)W^0 + u(1)W^3 + u(2)W^6 + u(3)W^9$$

N = 4の離散フーリエ変換は

ここまでに述べたくりかえしの性質
$W^0 \to W^1 \to -W^0 \to -W^1 \to W^0 \to W^1 \to \ldots$を使うと

$$U(0) = u(0)W^0 + u(1)W^0 + u(2)W^0 + u(3)W^0$$
$$U(1) = u(0)W^0 + u(1)W^1 + u(2)W^2 + u(3)W^3$$
$$U(2) = u(0)W^0 + u(1)W^2 + u(2)W^4 + u(3)W^6$$
$$U(3) = u(0)W^0 + u(1)W^3 + u(2)W^6 + u(3)W^9$$

は，すなわち

$$U(0) = u(0)W^0 + u(1)W^0 + u(2)W^0 + u(3)W^0$$
$$U(1) = u(0)W^0 + u(1)W^1 - u(2)W^0 - u(3)W^1$$
$$U(2) = u(0)W^0 - u(1)W^0 + u(2)W^0 - u(3)W^0$$
$$U(3) = u(0)W^0 - u(1)W^1 - u(2)W^0 + u(3)W^1$$

となる

行の順番を入れ替えると

行の順番を入れ替えてみる

$$U(0) = u(0)W^0 + u(1)W^0 + u(2)W^0 + u(3)W^0$$
$$U(1) = u(0)W^0 + u(1)W^1 - u(2)W^0 - u(3)W^1$$
$$U(2) = u(0)W^0 - u(1)W^0 + u(2)W^0 - u(3)W^0$$
$$U(3) = u(0)W^0 - u(1)W^1 - u(2)W^0 + u(3)W^1$$

を

$$U(0) = u(0)W^0 + u(1)W^0 + u(2)W^0 + u(3)W^0$$
$$U(2) = u(0)W^0 - u(1)W^0 + u(2)W^0 - u(3)W^0$$

とすると…

$$U(1) = u(0)W^0 + u(1)W^1 - u(2)W^0 - u(3)W^1$$
$$U(3) = u(0)W^0 - u(1)W^1 - u(2)W^0 + u(3)W^1$$

W^0 と W^1 が
出てくる順番が同じ

行の順番を入れ替えると

行の順番を入れ替えると

$$U(0) = u(0)W^0 + u(1)W^0 + u(2)W^0 + u(3)W^0$$
$$U(2) = u(0)W^0 - u(1)W^0 + u(2)W^0 - u(3)W^0$$
$$U(1) = u(0)W^0 + u(1)W^1 - u(2)W^0 - u(3)W^1$$
$$U(3) = u(0)W^0 - u(1)W^1 - u(2)W^0 + u(3)W^1$$

は，

$$U(0) = (u(0) + u(2))W^0 + (u(1) + u(3))W^0$$
$$U(2) = (u(0) + u(2))W^0 - (u(1) + u(3))W^0$$

と，一定の手順で
まとめられる

$$U(1) = (u(0) - u(2))W^0 + (u(1) - u(3))W^1$$
$$U(3) = (u(0) - u(2))W^0 - (u(1) - u(3))W^1$$

掛け算の回数は
16回から8回に減った

この続きは

N = 8, 16, 32, … と, 2の累乗になっている場合は,

同じ手順を繰り返すことで, 最終的に2行ずつの組にすることができる

そんな複雑な数式は書けません…😵

「行列」を使えば, もうすこしシンプルに書くことができます。
次回, 行列を説明したあと, N=8の場合を説明して,
高速フーリエ変換のもう少し細かいところを説明します。

テキスト付録2：離散フーリエ変換するとデータが2倍に増えているのか？🤔

離散フーリエ変換の結果は複素数

N個の実数値は, N個の複素数値に変換される

複素数は $a+bi$ の形で, 2つの実数の組になっている

離散フーリエ変換によって,
データの大きさが2倍になっているのか？🤔

そんなことはないはずです。

離散フーリエ変換と対称性

数列 $u(n)$ を離散フーリエ変換したものが 数列 $U(k)$ であるとき

$U^*(N-k) = U(k)$ という対称性がある

*は複素共役
$U = a + bi$ のとき, $U^* = a - bi$

なぜならば, 👉

離散フーリエ変換と対称性

数列 $u(n)$ を離散フーリエ変換したものが　数列 $U(k)$ であるとき

$U^*(N-k) = U(k)$ なぜならば,

$u(n)$ が実数ならば, $u^*(n) = u(n)$ なので

$$
\begin{aligned}
U^*(N-k) &= \sum_{n=0}^{N-1} u^*(n) \exp(i2\pi \frac{N-k}{N} n) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \exp(i2\pi n) \exp(i2\pi \frac{-k}{N} n)
\end{aligned}
$$

離散フーリエ変換と対称性

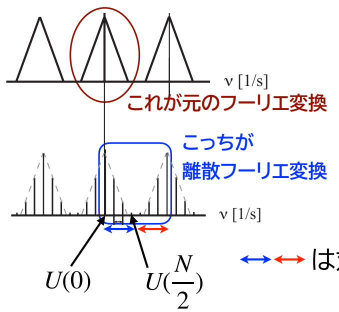
$$
\begin{aligned}
U^*(N-k) &= \sum_{n=0}^{N-1} u^*(n) \exp(i2\pi \frac{N-k}{N} n) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \exp(i2\pi n) \exp(i2\pi \frac{-k}{N} n)
\end{aligned}
$$

n が整数のとき 指数関数と三角関数の関係から
$\exp(i2\pi n) = \cos(2\pi n) + i \sin(2\pi n) = 1 + 0 = 1$, **よって**

$$
U^*(N-k) = \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \exp(i2\pi \frac{-k}{N} n) = U(k)
$$

やっぱりデータは2倍にはなってない

n が整数のとき 指数関数と三角関数の関係から
$\exp(i2\pi n) = \cos(2\pi n) + i \sin(2\pi n) = 1 + 0 = 1$, **よって**



↔↔ は対称

$u(n)$ が実数ならば, $U^*(k) = U(n-k)$ なので
離散フーリエ変換で表されている
最大の周波数は $N/2$

「指数関数2つの組でひとつの波」だから,
当然といえば当然ですね

第2部へ

第2部は画像データ圧縮

画像の細かいところを, 見た目にはわからないようにごまかして, データ量を減らす

「細かいところ」はどのように表現されるか？
　→周波数で表現される

そういうわけで, もう少しフーリエ変換とおつきあいください。

もっと一般的な原理から説明します。まずは数学の「行列」から。