

## ベクトルと行列について (数学の補足説明)

今日は、「行列」や「ベクトル」の考え方の基本を、高校で習っていない人向けに手短かに解説します。また、フーリエ変換を行列で表す方法で、前回さわりを説明した高速フーリエ変換について、もう一度説明します。

### ベクトルと行列の計算

#### ベクトル

次回 (第 7 回) のテキストでは、「画素が 2 つしかない画像」を考えて、その画素値  $x_1, x_2$  を

$$z = a_1x_1 + a_2x_2 \quad (1)$$

という式で画素値  $z$  に変換する、という話が出てきます。これを、「ベクトル」の書き方では、次のように書きます。

$$z = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

右辺の左側の  $( )$  を**行ベクトル**、右側の  $( )$  を**列ベクトル**とといいます。また、この計算はベクトル同士のかけ算の一種で、**内積**とといいます。このように数字を  $( )$  に入れて並べるだけで、上の (1) 式の計算をしたことになります。

#### 問題 1

次のベクトルの計算をしてください。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (3)$$

#### 行列

最初の「画素が 2 つしかない画像」 $x_1, x_2$  を、別の「画素が 2 つしかない画像」次に、上の (1) 式のような計算が 2 組ある場合を考えます。もともとの画素値が  $x_1, x_2$  の 2 つの組だったので、これを別の 2 つの画素値の組に、2 組の計算で変換する場合があります。このとき、それぞれの組を添字 (1) と (2) で区別して、変換後の画素値  $z_{(1)}, z_{(2)}$  を求める計算を、ベクトルで表すと

$$\begin{aligned} z_{(1)} &= \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ z_{(2)} &= \begin{pmatrix} a_{1(2)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

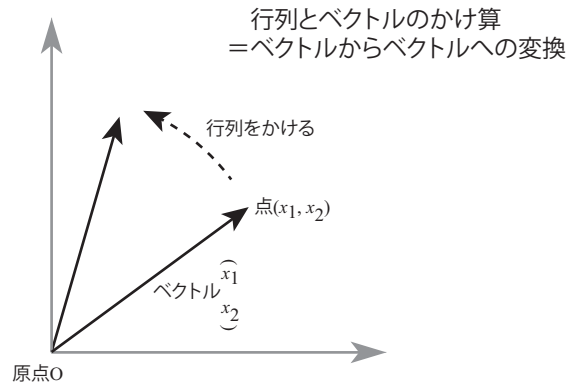


図 1: 行列とベクトルのかけ算.

となります<sup>1</sup>。この2つの式をひとつにまとめて、次のように書きます。

$$\begin{pmatrix} z(1) \\ z(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} \\ a_{1(2)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

この式の右辺にある、数の4つ入った()を**行列**といい、右辺の計算を「行列とベクトルのかけ算」といいます。行ベクトルが列になって並んでいるので、行列とよぶわけです。

### 問題 2

次の行列とベクトルの計算をしてください。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

### 行列、ベクトルと座標平面

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  を座標平面でのある点と考えると、(5)式の計算は、 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  という点を  $\begin{pmatrix} z(1) \\ z(2) \end{pmatrix}$  という点に移動する計算を表す、ということもできます。また、このときベクトルという言葉を使うと、「 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  は原点から点  $(x_1, x_2)$  をさすベクトル (位置ベクトル) である」といいます。図形的には、原点から点  $(x_1, x_2)$  まで伸びた矢印を想像すればよいでしょう。この言い方をすると、行列とベクトルのかけ算は、ベクトルをベクトルに変換する計算といえることができます (図1)。

### 問題 3

問題2のベクトル  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  と、問題2の計算結果のベクトルを、座標平面に図示してください。

<sup>1</sup>ふつうは、添字にこのようなカッコはつけず、 $a_{11}, a_{21}$  のように書きます。ここでは、添え字の意味をわかりやすくするために、このようにカッコをつけて書いています。

## 行列と行列のかけ算

次回（第7回）のテキストには、

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

という形の式も出てきます。ここで、右辺の $\lambda$ は普通の数（スカラー）で、このとき右辺は $\begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}$ を表します。

回りのテキストでは、この式を満たす $a_1, a_2$ は2組あるので、 $\lambda$ もそれぞれに対応して2つある、という話になっています。それらを $\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}$ と表すと、それぞれに対応する式は

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix} = \lambda_{(1)} \begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix} = \lambda_{(2)} \begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix} \quad (9)$$

と表されます。

では、今度はこれらの2つの式を、ひとつにまとめて表してみましょう。列ベクトル $\begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix}$ を左右にくっつけて、 $\begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix}$ と、ひとつの行列で表します。すると、(8)式、(9)式の2つの式は、まとめて

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} \end{pmatrix} \quad (10)$$

と表すことができます。このように、2つの「行列とベクトルのかけ算」をひとつの式に書いたのが、「行列と行列のかけ算」です。

本当にそうなっていることを確かめてみましょう。(10)式の左辺は、上で述べたとおり、

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix} \right)$$

のように列ベクトルを左右にくっつけたものです。

一方、(10)式の右辺も、右側の行列を列ベクトルに分けて

$$\begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{(2)} \end{pmatrix} \right)$$

と表すと、左側の行列  $\begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix}$  と右側の行列の左側の列ベクトル  $\begin{pmatrix} \lambda_{(1)} \\ 0 \end{pmatrix}$  の積は

$$\begin{pmatrix} \lambda_{(1)}a_{1(1)} + 0 \cdot a_{1(2)} \\ \lambda_{(1)}a_{2(1)} + 0 \cdot a_{2(2)} \end{pmatrix} \text{ すなわち } \begin{pmatrix} \lambda_{(1)}a_{1(1)} \\ \lambda_{(1)}a_{2(1)} \end{pmatrix} = \lambda_{(1)} \begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix}$$

となります。右側の列ベクトルについても同様です。このように、(行列×列ベクトル) のかけ算を2つ同時に行うのが、行列のかけ算です。

#### 問題 4

次の行列と行列の計算をしてください。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

#### 要素が $p$ 個あるベクトルの場合

ここまでは、「画素が2つしかない画像」を考えたところから出発して、2つの要素からなるベクトルについての計算を考えてきました。では、「要素が  $p$  個あるベクトル」の場合を考えてみましょう。

(8) 式, (9) 式の形の式を、要素が  $p$  個の場合に表すと、

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} \quad (12)$$

となります。また、(10) 式を、要素が  $p$  個のベクトルの場合に表すと、

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & & & 0 \\ & \lambda_{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{(p)} \end{pmatrix} \quad (13)$$

となります。

こんな式は、大変複雑でとても扱いきれません。また、要素が  $p$  個ある場合は、ベクトルも  $p$  次元空間での「矢印」になり、2次元の場合のように図形的に考えることもできません。

そこで、(13) 式の各行列をそれぞれひとつの文字で表して、

$$SP = PA \quad (14)$$

と表してしまいます。こうしてしまうと、2次元でも  $p$ 次元でも変わりはありません。このように、**複雑な計算をあたかも数の計算のように表して、単純な形で理解しようというのが、行列というものが考えられた理由**です。

ただし、行列のかけ算では、積  $AB$  と積  $BA$  は同じとは限りません。すなわち、数のかけ算とは違って、かける順番が問題になります。

## 転置行列と対称行列

**転置行列**とは、ある行列の行と列を入れ替えたもので、例えば行列  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  の転置行列は  $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  です。行列  $A$  の転置行列を、 ${}^tA, A^t, A^T, A'$  などと表します。今回の講義のプリントでは最後の  $A'$  を使っていますが、これは統計学の教科書に多い方式です。さらに、ある行列とその転置行列が同じとき、その行列を**対称行列**といいます。

### 問題 5

1.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  の転置行列を求めてください。
2.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  と  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  は、それぞれは対称行列ですか。

## 逆行列と単位行列

さきほど「行列と行列のかけ算」を説明しましたが、行列には「割り算」はありません。そのかわりにあるのが**逆行列**です。

数の割り算で、例えば「2で割る」という計算は、「 $\frac{1}{2}$ をかける」と同じです。この2つの数字は、 $2 \times \frac{1}{2} = 1$ で、「かけると1」という関係になっています。この「1」は、「かけても何もおこらない数」で、**単位元**といいます。

これと同じように、「かけても何もおこらない行列」を考えます。これを**単位行列**といい、 $I$ で表します。つまり、単位行列  $I$  は、どんな行列  $X$  に対しても  $XI = IX = X$  となる行列のことです。そして、行列の  $A$  の逆行列  $A^{-1}$  とは、 $AA^{-1} = A^{-1}A = I$  となる行列のことで、「かけると  $I$ 」という関係になっています。つまり、逆行列  $A^{-1}$  をかけることが、あたかも「行列  $A$  で割る」のと同じような計算になっています。例えば、行列の積  $XA$  に右から  $A^{-1}$  をかけると  $XAA^{-1} = X$  となり、「 $A$  で割った」のと同じことになっているのがわかります。

また、(14) 式の  $SP = P\Lambda$  という関係は、逆行列を使うと

$$P^{-1}SP = \Lambda \quad (15)$$

とも表されます。

単位行列の中身は、左上から右下に向かう対角線上の数（対角成分）がすべて1、他はすべて0になります。2次元の場合、 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  が単位行列です。

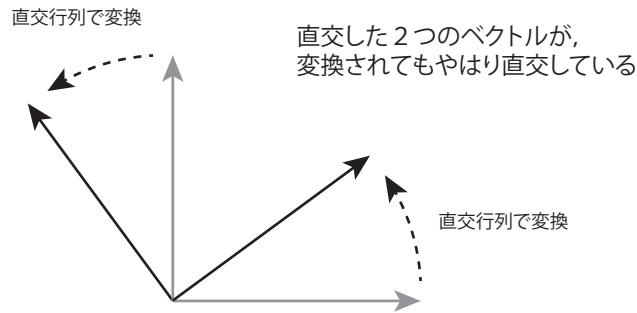


図 2: 直交行列によるベクトルの変換.

## 直交行列

**直交行列**とは、逆行列が転置行列と同じであるような行列です。つまり、行列  $R$  が

$$R'R = RR' = I \quad (16)$$

のとき、 $R$  は直交行列です。

「直交行列」という名前は、直交行列に含まれる各列ベクトルが互いに直交していて、いずれも大きさが1であることをさしています。このことを、各列ベクトルが**正規直交基底**をなす、といいます。なお、「2つのベクトルが直交している」とは、図形的にはまさに「直角に交わる」ことですが、定義としては「それらの内積が0である」ことをいいます。

もともと直交している2つのベクトルを直交行列で変換すると、それぞれを変換したベクトルもやはり直交しています。図形的には、直交座標の座標軸を直交したまま回転する計算は、直交行列をかける計算で表されます (図 2)。

### 問題 6

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

が直交行列であることを確かめてください。

### 問題 7

- ベクトル  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  と  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  が直交していることを、図に描いて確認してください。
- 座標軸の  $x$  軸はベクトル  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  で、 $y$  軸はベクトル  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  で、それぞれ表されます。これらのベクトルを直交行列  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  で変換して、変換後のベクトルも直交していることを図で確認してください。

---

## 高速フーリエ変換 (続き)

前回簡単に説明した「高速フーリエ変換」を、フーリエ変換の計算を行列で表す方法で考えてみましょう。前回と同様に、離散フーリエ変換の式

$$U(k) = \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \exp\left(-i2\pi \frac{k}{N}n\right) \quad (k = 0, 1, \dots, N-1) \quad (18)$$

で、計算する点の数が4、すなわち  $N = 4$  とすると、(18) 式は

$$U(k) = \sum_{n=0}^3 u(n) \exp\left(-i2\pi \frac{k}{4}n\right) \quad (k = 0, 1, \dots, 3) \quad (19)$$

となります。この計算は、 $4^2$  回のかけ算でできています。

この計算を、行列を用いて表してみます。ここで、前回と同様に

$$W \equiv \exp\left(-i\frac{2\pi}{4}\right) \quad (20)$$

とおくと、

$$\begin{pmatrix} U(0) \\ U(1) \\ U(2) \\ U(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^{0\cdot0} & W^{0\cdot1} & W^{0\cdot2} & W^{0\cdot3} \\ W^{1\cdot0} & W^{1\cdot1} & W^{1\cdot2} & W^{1\cdot3} \\ W^{2\cdot0} & W^{2\cdot1} & W^{2\cdot2} & W^{2\cdot3} \\ W^{3\cdot0} & W^{3\cdot1} & W^{3\cdot2} & W^{3\cdot3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \\ u(3) \end{pmatrix} \quad (21)$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} U(0) \\ U(1) \\ U(2) \\ U(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \\ u(3) \end{pmatrix} \quad (22)$$

という行列の掛け算で表すことができます。

ここで、右辺にある列ベクトルの要素の順番を、 $u(0), u(2), u(1), u(3)$  の順に変えます。すると、

$$\begin{pmatrix} U(0) \\ U(1) \\ U(2) \\ U(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^2 & W^1 & W^3 \\ W^0 & W^4 & W^2 & W^6 \\ W^0 & W^6 & W^3 & W^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(2) \\ u(1) \\ u(3) \end{pmatrix} \quad (23)$$

となります。さらに

$$W^4 = \exp\left(-i2\pi\frac{4}{4}\right) = 1 = W^0 \quad (24)$$

を用いると、

$$\begin{pmatrix} U(0) \\ U(1) \\ U(2) \\ U(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^2 & W^1 & W^3 \\ W^0 & W^0 & W^2 & W^2 \\ W^0 & W^2 & W^3 & W^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(2) \\ u(1) \\ u(3) \end{pmatrix} \quad (25)$$

と表すことができます。

この右辺の行列を、次のように2つの行列の積で表します。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} U(0) \\ U(1) \\ U(2) \\ U(3) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0W^0 & W^0W^0 \\ W^0 & W^2 & W^1W^0 & W^1W^2 \\ W^0 & W^0 & W^2W^0 & W^2W^0 \\ W^0 & W^2 & W^3W^0 & W^3W^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(2) \\ u(1) \\ u(3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^1 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & 0 & 0 \\ W^0 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^0 & W^0 \\ 0 & 0 & W^0 & W^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(2) \\ u(1) \\ u(3) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$

このように表したとき、後半の「行列掛けるベクトル」の計算は、実際には

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} W^0 & W^0 \\ W^0 & W^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(2) \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} W^0 & W^0 \\ W^0 & W^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(1) \\ u(3) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (27)$$

の2つの「分割された行列」の計算を行っているのと同じです。このそれぞれで、 $W^m$  ( $m = 0, 1, 2, 3$ ) を掛ける計算を4回ずつ行っています。一方、(26)式の右辺の最初の行列を掛ける計算では、 $W^m$  を掛ける計算は4回行います。したがって、 $W^m$  を掛ける計算は  $4 + 4 \times 2 = 12$  回で、元の  $4^2 = 16$  回から減っています。

(27)式の2つの計算は、 $N = 2$  のフーリエ変換になっています。つまり、「 $N = 4$  のフーリエ変換」を、「 $N = 2$  のフーリエ変換が2回+掛け算4回」で表したことになります。同様に、「 $N = 8$  のフーリエ変換」を「 $N = 4$  のフーリエ変換が2回+掛け算8回」で表すことができます。そこで、この分割を繰り返し適用して、



$N = 8$  のフーリエ変換 →

掛け算 8 回 +  $2 \times (N = 4$  のフーリエ変換) →

掛け算 8 回 +  $2 \times ($  掛け算 4 回 +  $2 \times (N = 2$  のフーリエ変換)) →

掛け算 8 回 + 掛け算 8 回 +  $2 \times 2 \times$  掛け算 4 回

と表すと、 $N = 8$  のフーリエ変換では元々  $8^2 = 64$  回の掛け算が必要だったのが、 $8 + 8 + 4 \times 4 = 32$  回に減っています。一般に、 $N$  点のフーリエ変換は元々  $N^2$  回の掛け算が必要だったのが、この方法で分割していくと  $\log_2 N$  段階に分割され、それぞれで  $N$  回の掛け算を行うので (概ね)、 $N \log_2 N$  に比例した回数の掛け算で済むことになります。

このように、問題を半分、さらに半分、さらに半分…と分けていく方法は「分割統治 (divide and conquer) 法」とよばれ、アルゴリズムの高速化によく用いられるものです。数字を大きさの順に並べ替える「ソートリング」で、計算量を減らすための方法である「クイックソート」も、同様の考えにもとづいています。