

2021年度秋学期 画像情報処理 第6回
ベクトルと行列について
(数学の補足説明・第2部「画像情報圧縮」の準備)

浅野 晃
関西大学総合情報学部



※このスライドには、問題の解答例は載っていません。

ベクトルと行列の考え方

たくさんの数の組を、ひとまとめに計算する

ひとつの組がいくつの数でできていても、
同じように計算できるようにする

組の中身を意識せずにすむことによって、
さらに複雑な計算を考えることができる
(現代のプログラミングも同じ考えかた)

ベクトルの計算

$z = a_1x_1 + a_2x_2$ この計算を

$$z = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ と書く}$$

行ベクトル 列ベクトル

問題1

問題 1

次のベクトルの計算をしてください。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Pause 

ベクトルの計算が2つ

$$z_{(1)} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$z_{(2)} = \begin{pmatrix} a_{1(2)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

この計算をまとめて

$$\begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} \\ a_{1(2)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

と書く

行列

問題2

問題 2

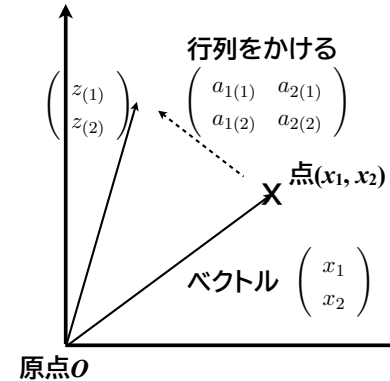
次の行列とベクトルの計算をしてください。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pause 

図形的意味

別のベクトルに変換



問題3

問題 3

問題2のベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ と、問題2の計算結果のベクトルを、座標平面に図示してください。

Pause 

定数倍の計算

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

↓

$$\begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix} \text{ の意味}$$

行列と行列の計算

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix} = \lambda_{(1)} \begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix}$$

この計算をまとめて

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix} = \lambda_{(2)} \begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix}$$

$\lambda_{(1)}$ に関する計算

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} \end{pmatrix}$$

行列とベクトルの計算が2つ

問題4

問題 4

次の行列と行列の計算をしてください。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pause 

要素がp個の場合

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

は,

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$$

要素がp個の場合

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} \end{pmatrix}$$

は,

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix}$$

なんのために???

$$= \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & & & 0 \\ & \lambda_{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{(p)} \end{pmatrix}$$

行列を1文字で表す

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & & & 0 \\ & \lambda_{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{(p)} \end{pmatrix}$$

$$SP = P\Lambda$$

複雑な計算を、あたかも数の計算のように単純に考える

ただし

行列の積は、交換ができない
ABとBAが等しいとは限らない

転置行列・対称行列

行列 $A \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ **転置行列**
 ${}^tA, A^t, A^T, A'$

ある行列とその転置行列が同じとき、**対称行列**という

問題5

問題 5

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の転置行列を求めてください。
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は、それぞれは対称行列ですか。

Pause 

逆行列

行列には割り算はない

$AA^{-1} = A^{-1}A = I$ **単位行列**
 (かけ算をしても何もおこらない)
 となる A^{-1} を、 A の**逆行列**という

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

数の場合は

$$a \times \frac{1}{a} (\text{逆元}) = 1 (\text{単位元})$$

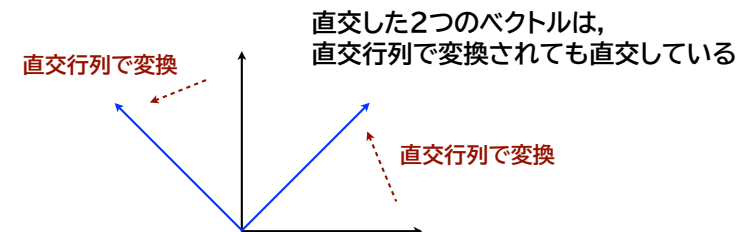
行列の場合は

$$AA^{-1} (\text{逆行列}) = I (\text{単位行列})$$

直交行列

逆行列が転置行列と同じであるような行列を**直交行列**という

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 直交行列の列ベクトルどうしは直交している



問題6

問題 6

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

が直交行列であることを確かめてください。

Pause 

問題7

問題 7

1. ベクトル $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が直交していることを、図に描いて確認してください。
2. 座標軸の x 軸はベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で、 y 軸はベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で、それぞれ表されます。これらのベクトルを直交行列 $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ で変換して、変換後のベクトルも直交していることを図で確認してください。

Pause 

高速フーリエ変換(続き) 🤔

前回の続き

前回、4点だけの信号($N = 4$)の離散フーリエ変換について考えたが、これを行列で書いてみる

離散フーリエ変換の式は

$$U(k) = \sum_{n=0}^3 u(n) \exp\left(-i2\pi \frac{k}{4}n\right) \quad (k = 0, 1, \dots, 3)$$

1つの $U(\cdot)$ を計算するのに、掛け算を4回

全部で $4^2 = 16$ 回の掛け算 🤔

行列で表すと

行列で表すと $W \equiv \exp\left(-i\frac{2\pi}{4}\right)$ において

$$\begin{pmatrix} U(0) \\ U(1) \\ U(2) \\ U(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^{0\cdot0} & W^{0\cdot1} & W^{0\cdot2} & W^{0\cdot3} \\ W^{1\cdot0} & W^{1\cdot1} & W^{1\cdot2} & W^{1\cdot3} \\ W^{2\cdot0} & W^{2\cdot1} & W^{2\cdot2} & W^{2\cdot3} \\ W^{3\cdot0} & W^{3\cdot1} & W^{3\cdot2} & W^{3\cdot3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \\ u(3) \end{pmatrix}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} U(0) \\ U(1) \\ U(2) \\ U(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \\ u(3) \end{pmatrix}$$

順序を入れ替える

$$\begin{pmatrix} U(0) \\ U(1) \\ U(2) \\ U(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \\ u(3) \end{pmatrix}$$

右辺のベクトルで、要素の順序を入れ替える

$$\begin{pmatrix} U(0) \\ U(1) \\ U(2) \\ U(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^2 & W^1 & W^3 \\ W^0 & W^4 & W^2 & W^6 \\ W^0 & W^6 & W^3 & W^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(2) \\ u(1) \\ u(3) \end{pmatrix}$$

指数関数／三角関数の性質を使って

$W^4 = \exp\left(-i2\pi\frac{4}{4}\right) = 1 = W^0$ という周期関数の性質があるので

$$\begin{pmatrix} U(0) \\ U(1) \\ U(2) \\ U(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^2 & W^1 & W^3 \\ W^0 & W^4 & W^2 & W^6 \\ W^0 & W^6 & W^3 & W^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(2) \\ u(1) \\ u(3) \end{pmatrix} \text{ は,}$$

$$\begin{pmatrix} U(0) \\ U(1) \\ U(2) \\ U(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^2 & W^1 & W^3 \\ W^0 & W^0 & W^2 & W^2 \\ W^0 & W^2 & W^3 & W^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(2) \\ u(1) \\ u(3) \end{pmatrix} \text{ と表せる}$$

2つの行列の積に分ける

$$\begin{pmatrix} U(0) \\ U(1) \\ U(2) \\ U(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^2 & W^1 & W^3 \\ W^0 & W^0 & W^2 & W^2 \\ W^0 & W^2 & W^3 & W^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(2) \\ u(1) \\ u(3) \end{pmatrix} \text{ の右辺の行列を、2つに分ける}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} U(0) \\ U(1) \\ U(2) \\ U(3) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0W^0 & W^0W^0 \\ W^0 & W^2 & W^1W^0 & W^1W^2 \\ W^0 & W^0 & W^2W^0 & W^2W^0 \\ W^0 & W^2 & W^3W^0 & W^3W^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(2) \\ u(1) \\ u(3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^1 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & 0 & 0 \\ W^0 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^0 & W^0 \\ 0 & 0 & W^0 & W^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(2) \\ u(1) \\ u(3) \end{pmatrix} \text{ と表せる} \end{aligned}$$

後半の「行列×ベクトル」は

掛け算4回

$$\begin{pmatrix} U(0) \\ U(1) \\ U(2) \\ U(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^1 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & 0 & 0 \\ W^0 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^0 & W^0 \\ 0 & 0 & W^0 & W^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(2) \\ u(1) \\ u(3) \end{pmatrix}$$

の後半の
行列×ベクトルは

Wの掛け算4回

$$\begin{pmatrix} W^0 & W^0 \\ W^0 & W^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(2) \end{pmatrix}$$

掛け算4回

$$\begin{pmatrix} W^0 & W^0 \\ W^0 & W^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(1) \\ u(3) \end{pmatrix}$$

この2つの「分割された行列」の
計算になっている

掛け算の回数は $4 + 4 \times 2 = 12$ 回

元の $4^2 = 16$ 回から減った💡

N=8の場合は

$$\begin{pmatrix} W^0 & W^0 \\ W^0 & W^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(2) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} W^0 & W^0 \\ W^0 & W^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(1) \\ u(3) \end{pmatrix}$$

これらは、N=2のフーリエ変換

N=8 のときは 元々 $8^2 = 64$ 回の掛け算が必要

N=8 のフーリエ変換 →

掛け算8回 + $2 \times$ (N=4 のフーリエ変換) →

掛け算8回 + $2 \times$ (掛け算4回 + $2 \times$ (N=2 のフーリエ変換)) →

掛け算8回 + 掛け算8回 + $2 \times 2 \times$ 掛け算4回

掛け算の回数は $8 + 8 + 4 \times 4 = 32$ 回💡

「分割統治戦略」

一般に、N点のフーリエ変換には掛け算が N^2 回必要だったが、
 $\log_2 N$ 段階に分割され、それぞれで N 回の掛け算を行うので(概ね)、
 $N \log_2 N$ に比例した回数で済む

このように、問題を半分、半分、半分、…に分けていく方法は、
他にもいろいろなところで使われている
(「クイックソート」等)

さて、第2部の本題へ💡

第2部の本題へ

第2部は画像データ圧縮

画像を、各画像で大きく異なる部分と
どの画像でもあまりかわらない部分にわけ



どの画像でもあまり変わらない部分 なんて、ある？

直交変換すると、
「大まかな部分」「細かい部分」が別
なるように組み替えられる

どの画像でもあまりかわらない部分は、ごまかす
フーリエ変換も、行列で表すと直交変換の一種