

主成分分析とKarhunen-Loeve変換

浅野 晃
関西大学総合情報学部



画像情報圧縮

画像情報圧縮の必要性



この画像では、1画素の明るさを0~255の整数で表す
1画素に、2進数8桁 = 8ビット = 1バイト必要
1000万画素のデジタル画像は、約10メガバイト必要



こういう画像は、1画素 = 16ビットで、
2倍の20メガバイト必要なこともある



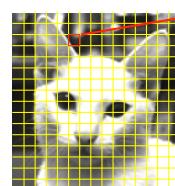
カラー画像ならば、R,G,Bで3倍必要

動画ならば、1秒でこのデータ量の30倍?60倍?

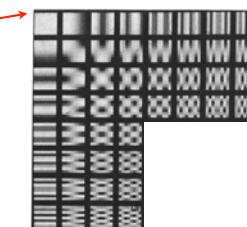
JPEG方式による画像圧縮

画像を波の重ね合わせで表わし、一部を省略して、データ量を減らす

8×8ピクセルずつの
セルに分解



ひとつのセルを、
これらの波の重ね合わせで表す



細かい部分は、どの画像でも大してかわらないから、省略しても気づかない

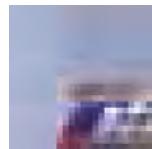
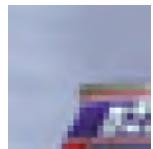
省略すると、データ量が減る

画像情報圧縮の例

データ量:80KB



データ量:16KB



(8×8ピクセルのセルが見える)

2021年度秋学期 画像情報処理 / 関西大学総合情報学部 浅野 光 5 | 31

ところで、本当に「波」でいいんですか？

まあ、結局「波」でいいんですけどね…

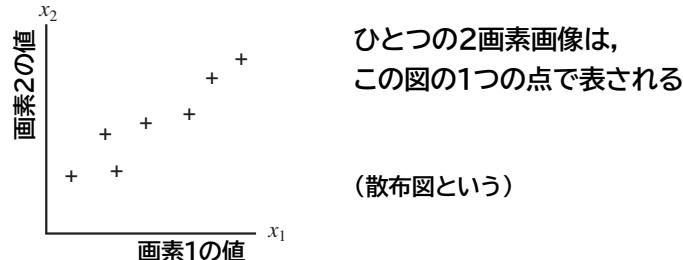
もっと根本的な原理から説明します。

「主成分分析」と「直交変換」

主成分分析

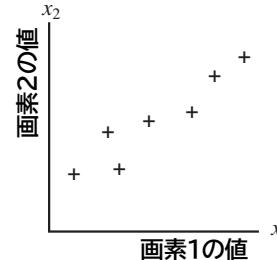
重要な成分と、そうでない成分

しばらく、**画素が2つしかない画像**を考える
たくさんの2画素画像を考える



2021年度秋学期 画像情報処理 / 関西大学総合情報学部 浅野 規 9 | 31

どちらかの画素値を省略できるか？



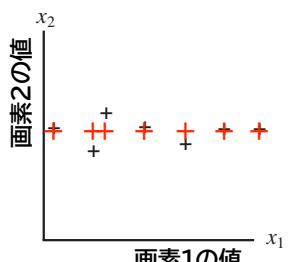
たくさんの2画素画像が
こんなふうに散らばって(分布して)いたら

各画像の違いを表現するのには、
どちらの画素も省略することはできない

どちらの画素値の分散も大きい

2021年度秋学期 画像情報処理 / 関西大学総合情報学部 浅野 規 10 | 31

こんな分布なら



画素2の値は、どの画像でもあまり変わりない
(分散が小さい)

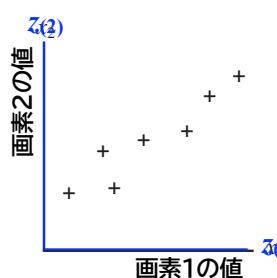
各画像の違いを表現するのに、
画素2はそれほど必要ない

画素2の値は、**それらの平均**に置きかえてしまってもそれほど変わらない
画素2の値はいちいち記録しなくてもいいから、**データ量が半分に減る**

2021年度秋学期 画像情報処理 / 関西大学総合情報学部 浅野 規 11 | 31

そういう都合のいい分布に変換できないの？

散布図上である方向に広がっているなら
(x_1, x_2 に相関があるなら)できます。こうすればいい



x_1, x_2 を回転して、新たに $z(1), z(2)$ とすればよい

$z(1)$ の分散がもっと大きくなるように回転する

このとき $z(1)$ と $z(2)$ の相関がなくなる

これをするのが**主成分分析**

2021年度秋学期 画像情報処理 / 関西大学総合情報学部 浅野 規 12 | 31

主成分分析

x_1, x_2 から次の式で z を求めるものとし,
 z の分散 $V(z)$ が最大になる a_1, a_2 を求める

$$z = a_1x_1 + a_2x_2$$

$V(z)$ を求めるために、次の量を用いる

x_{1i}, x_{2i} n 枚中の*i*番目の画像の、 x_1, x_2 の値

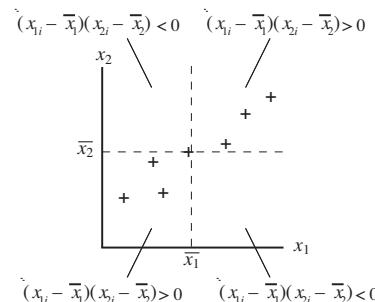
\bar{x}_1, \bar{x}_2 , x_1, x_2 の全画像にわたる平均

s_{11}, s_{22} : x_1, x_2 の分散

2021年度秋学期 画像情報処理 / 関西大学総合情報学部 浅野 晃 13 | 31

さらに共分散も用いる

$$s_{12} = s_{21} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2) \quad x_1, x_2 の共分散$$



共分散の正負 = 相関の正負

(共分散を x_1, x_2 の標準偏差で割ったものが相関係数)

2021年度秋学期 画像情報処理 / 関西大学総合情報学部 浅野 晃 14 | 31

さて、 z の分散 $V(z)$ は

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2 \\ &= a_1^2 s_{11} + 2a_1 a_2 s_{12} + a_2^2 s_{22} \quad (3)式 \end{aligned}$$

$V(z)$ が最大になる a_1, a_2 を求める

x から z への変換は「回転」(伸び縮みしない) $\rightarrow a_1^2 + a_2^2 = 1$

2021年度秋学期 画像情報処理 / 関西大学総合情報学部 浅野 晃 15 | 31

固有値問題

定数入を使って

$$\begin{aligned} a_1 s_{11} + a_2 s_{12} &= a_1 \lambda \\ a_2 s_{22} + a_1 s_{12} &= a_2 \lambda \end{aligned} \quad \text{が得られる(付録1)}$$

行列で書くと

$$\underbrace{\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{pmatrix}}_{\text{分散共分散行列}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

固有ベクトル 固有値

固有値・固有ベクトルを求める問題を
「固有値問題」という(解き方は略)

2021年度秋学期 画像情報処理 / 関西大学総合情報学部 浅野 晃 16 | 31

第1主成分

固有ベクトル $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ が2組得られて、しかも $V(z) = \lambda$ となる
固有値 λ (付録2)

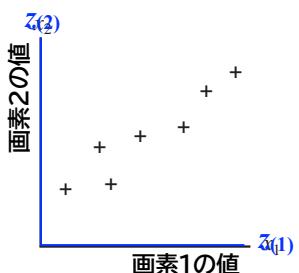
大きい方の λ ($\lambda_{(1)}$ とする)に対応する固有ベクトル $\begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix}$ を使って
求めた z ($z_{(1)}$ とする) が、求めたかった z

第1主成分という

2021年度秋学期 画像情報処理 / 関西大学総合情報学部 浅野 光 17 | 31

主成分分析と直交変換

このとき $z_{(1)}$ と $z_{(2)}$ は無相関



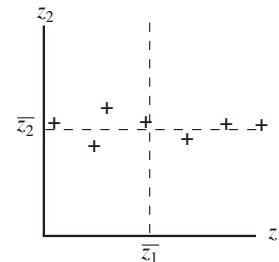
x_1, x_2 を回転して、新たに $z_{(1)}, z_{(2)}$ とする

$z_{(1)}$ の分散がもっとも大きくなるように回転する

このとき $z_{(1)}, z_{(2)}$ の相関がなくなる。
なぜなら

2021年度秋学期 画像情報処理 / 関西大学総合情報学部 浅野 光 19 | 31

相関がない $\rightarrow (z_{1i} - \bar{z}_1)(z_{2i} - \bar{z}_2)$ の正負がつりあう



共分散=0

先ほど求めた
 $z_{(1)}, z_{(2)}$ はこうなっている → 本当？

分散共分散行列はどうなる？

2021年度秋学期 画像情報処理 / 関西大学総合情報学部 浅野 光 20 | 31

主成分分析と分散共分散行列

固有値のうち、大きい方を $\lambda_{(1)}$ 、小さい方を $\lambda_{(2)}$

対応する固有ベクトル $\begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix}$

これらは

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix} = \lambda_{(1)} \begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix} = \lambda_{(2)} \begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix}$$

2021年度秋学期 画像情報処理 / 関西大学総合情報学部 浅野 晃 21 | 31

分散共分散行列の対角化

まとめると

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} \end{pmatrix}$$

つまり $SP = P\Lambda$

すなわち $\Lambda = P^{-1}SP, S = P\Lambda P^{-1}$

(分散共分散行列の)対角化という

2021年度秋学期 画像情報処理 / 関西大学総合情報学部 浅野 晃 22 | 31

対称行列の対角化

分散共分散行列 S は $\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$
対称行列 $s_{12} = s_{21}$ 共分散

対称行列の固有ベクトルは直交する(詳細略)

P は直交行列 $\begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix}$

直交行列の逆行列は転置行列(逆回転)

すなわち $S = P\Lambda P'$

2021年度秋学期 画像情報処理 / 関西大学総合情報学部 浅野 晃 23 | 31

対角化の意味

$$S = P\Lambda P'$$

P' で変換し

分散共分散行列は
「この世」
そこでは分散共分散行列が Λ で
 P で戻る
「あの世」

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} \end{pmatrix}$$

あの世では共分散が0
→相関がない

2021年度秋学期 画像情報処理 / 関西大学総合情報学部 浅野 晃 24 | 31

P'で変換された「あの世」とは？

$$z_{(1)} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$z_{(2)} = \begin{pmatrix} a_{1(2)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

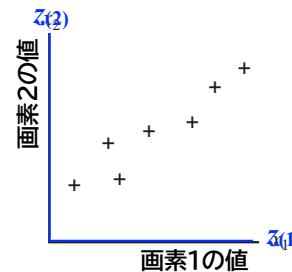
これが P'

$$\begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} \\ a_{1(2)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

直交行列で変換するから
直交変換という

つまり、 x から z に変換すると、
 $z_{(1)}$ と $z_{(2)}$ の共分散が $0 \rightarrow$ 相関がない

たしかに $z_{(1)}$ と $z_{(2)}$ は無相関



x_1, x_2 を回転して、新たに $z_{(1)}, z_{(2)}$ とする

$z_{(1)}$ の分散がもっとも大きくなるように回転する

このときたしかに $z_{(1)}, z_{(2)}$ には相関がない
分散共分散行列は対角行列となる

画素が p 個あっても同じ

x から z への、 P' による直交変換

$$\begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \\ \vdots \\ z_{(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} & \cdots & a_{p(1)} \\ a_{1(2)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{p(2)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{1(p)} & a_{2(p)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = P' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

P は固有値問題の解

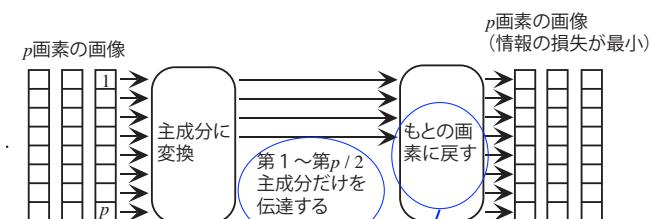
分散共分散行列 S

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$$

$$S \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & & & 0 \\ & \lambda_{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{(p)} \end{pmatrix}$$

Karhunen-Loève変換(KL変換)

画像を主成分に変換してから伝送する



データ量が半分でも
情報の損失は最小

もどすときは、

Karhunen-Loève変換(KL変換)

もどすときは

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \simeq (P')^{-1} \begin{pmatrix} z(1) \\ z(2) \\ \vdots \\ z_{(p/2)} \\ \overline{z_{(p/2+1)}} \\ \vdots \\ \overline{z(p)} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} z(1) \\ z(2) \\ \vdots \\ z_{(p/2)} \\ \overline{z_{(p/2+1)}} \\ \vdots \\ \overline{z(p)} \end{pmatrix}$$

伝送されて来なかつた主成分は、
平均に置き換えておく

2021年度秋学期 画像情報処理 / 関西大学総合情報学部 浅野 晃 29 | 31

KL変換の大問題

主成分を求めるには、**分散共分散行列が必要**

分散共分散行列を求めるには、
「いまから取り扱うすべての画像」が
事前にわかっていないといけない

そんなことは不可能。

2021年度秋学期 画像情報処理 / 関西大学総合情報学部 浅野 晃 30 | 31

続きは

分散共分散行列がわからないから、
どういう直交変換をしたらいいかもわからない

経験的にうまくいく直交変換を行う

画像をベクトルではなく、2次元のまま行列で表して
「行列の直交変換」を考え、
直交変換のようすが目に見えるようにする。

適切な直交変換を選ぶ（実は結局フーリエ変換とその変形）

2021年度秋学期 画像情報処理 / 関西大学総合情報学部 浅野 晃 31 | 31