

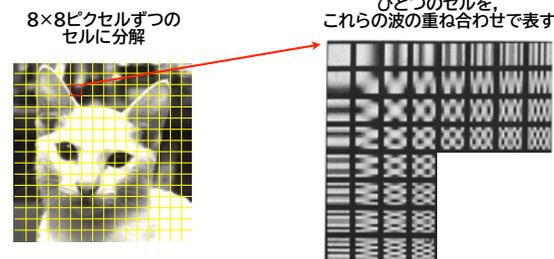
2021年度秋学期 画像情報処理 第8回  
行列の直交変換と基底画像

浅野 晃  
関西大学総合情報学部



## JPEG方式による画像圧縮

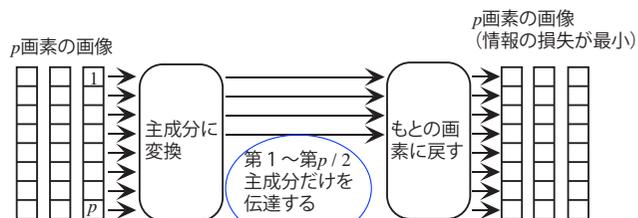
画像を波の重ね合わせで表わし、一部を省略して、データ量を減らす



細かい部分は、どの画像でも大してかわらないから、省略しても気づかない  
省略すると、データ量が減る

## Karhunen-Loève変換(KL変換)

画像を主成分に変換してから伝送する



データ量が半分でも情報の損失は最小

## KL変換の大問題

主成分を求めるには、分散共分散行列が必要

分散共分散行列を求めるには、「いまから取り扱うすべての画像」が事前にわかっていないといけない

そんなことは不可能🙄

じゃあ, 主成分を求めるのはあきらめて,  
どういふ直交変換をするか「直観的」に🤔

画像をベクトルにしてしまったら,  
直観がはたらかない…

行列の直交変換💡

画像を行列であらわす

平面のものを素直に表せばいいだけのことですが,  
前はベクトルで考えていたので。

$$z = P'x$$

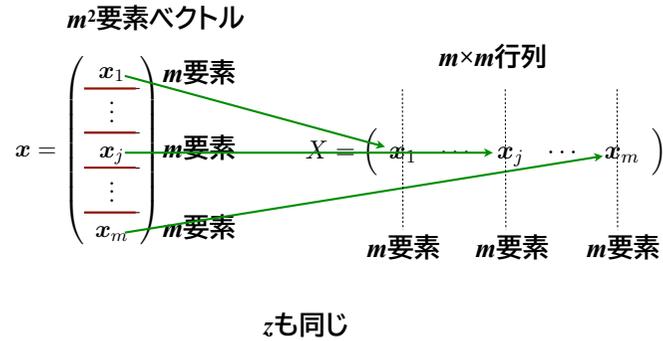
変換後の画像を表すベクトル ( $m^2$ 要素)

原画像を表すベクトル ( $m^2$ 要素)

直交変換を表す行列 ( $m^2 \times m^2$ )

ベクトルから行列に書き換える(戻す)ことを考える

## ベクトルを行列に書き換える



## 直交変換行列P'は？

P' がこういう形になっているのなら

$$P' = \begin{pmatrix} r_{11}c_{11} & \cdots & r_{11}c_{1m} & r_{1m}c_{11} & \cdots & r_{1m}c_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{11}c_{m1} & \cdots & r_{11}c_{mm} & r_{1m}c_{m1} & \cdots & r_{1m}c_{mm} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ r_{m1}c_{11} & \cdots & r_{m1}c_{1m} & r_{mm}c_{11} & \cdots & r_{mm}c_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1}c_{m1} & \cdots & r_{m1}c_{mm} & r_{mm}c_{m1} & \cdots & r_{mm}c_{mm} \end{pmatrix}$$

こういう形ってどういう形？

## 行列のKronecker積

$$P' = \begin{pmatrix} \begin{matrix} r_{11}c_{11} & \cdots & r_{11}c_{1m} \\ \vdots & \mathbf{r_{11} \times C} & \vdots \\ r_{11}c_{m1} & \cdots & r_{11}c_{mm} \end{matrix} & \cdots & \begin{matrix} r_{1m}c_{11} & \cdots & r_{1m}c_{1m} \\ \vdots & \mathbf{r_{1m} \times C} & \vdots \\ r_{1m}c_{m1} & \cdots & r_{1m}c_{mm} \end{matrix} \\ \vdots & & \vdots \\ \begin{matrix} r_{m1}c_{11} & \cdots & r_{m1}c_{1m} \\ \vdots & \mathbf{r_{m1} \times C} & \vdots \\ r_{m1}c_{m1} & \cdots & r_{m1}c_{mm} \end{matrix} & \cdots & \begin{matrix} r_{mm}c_{11} & \cdots & r_{mm}c_{1m} \\ \vdots & \mathbf{r_{mm} \times C} & \vdots \\ r_{mm}c_{m1} & \cdots & r_{mm}c_{mm} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mm} \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & \cdots & r_{mm} \end{pmatrix}$$

こうなっているのなら

Rの各要素に Cを貼付けたもの  $P' = R \otimes C$  Kronecker積

## 行列の変換に書き換える

ベクトルxから  
ベクトルzへの  
行列P'による変換

$$z = P' x$$

$$Z = C X R'$$

行列Xから  
行列Zへの  
行列CとR'による変換

証明は…ひたすら計算 (付録1)

## $P'$ が直交行列であるためには

直交行列... 異なる列の内積は0, 同じ列同士の内積は1

$$P' = \begin{pmatrix} r_{11}c_{11} & \cdots & r_{11}c_{1m} & \cdots & r_{1m}c_{11} & \cdots & r_{1m}c_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{11}c_{m1} & \cdots & r_{11}c_{mm} & \cdots & r_{1m}c_{m1} & \cdots & r_{1m}c_{mm} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1}c_{11} & \cdots & r_{m1}c_{1m} & \cdots & r_{mm}c_{11} & \cdots & r_{mm}c_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1}c_{m1} & \cdots & r_{m1}c_{mm} & \cdots & r_{mm}c_{m1} & \cdots & r_{mm}c_{mm} \end{pmatrix}$$

$P' = R \otimes C$  なら

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mm} \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & \cdots & r_{mm} \end{pmatrix}$$

$C, R$ それぞれが直交行列なら,  
 $P'$ は直交行列

## 分離可能性

$$CXR' =$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{1m} & \cdots & r_{mm} \end{pmatrix}$$

$C$ は $X$ の列に作用

$R$ は $X$ の行に作用

縦方向と横方向の作用を分離できることを,  
分離可能(separable)という

## 行列の直交変換とユニタリー変換

縦横の作用を区別する必要はない場合,  $C=R$ とする

$$Z = RXR' \quad X = R'ZR$$

ただし  $RR'=I$  行列 $X$ の行列 $R$ による直交変換

\*は複素共役( $i$ を $-i$ にかえる)

要素が複素数の場合は,  $R'$ のかわりに  $R'^*$ を用いる

行列 $X$ の行列 $R$ によるユニタリー変換

ちょっと余談ですが 🍷

## 縦横の作用を区別する必要はないのか？

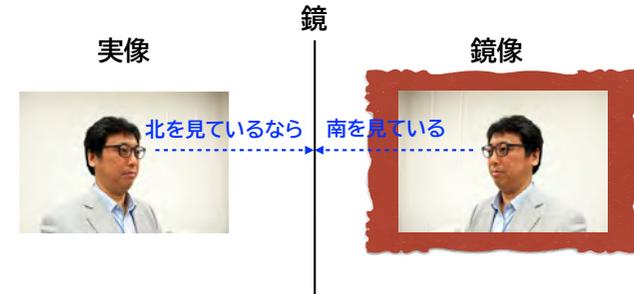
画像処理としてはその仮定はおかしくないが、  
現実世界においては、**重力があるので、左右と上下は異なる**



上下反転のほうが違和感が大きい  
だから

## 鏡ではなぜ左右だけ逆になるのか？

鏡で逆になっているのは、左右でも上下でもなく **前後**。



## 鏡ではなぜ左右だけ逆になるのか？

「鏡で逆になる」というなら、「正解」はなにか？



🤖🗣️ 正解はこれしかないでしょう？

左右が反転  
上下はそのまま

## 鏡ではなぜ左右だけ逆になるのか？

🗣️💬 いいえ、正解はそれだけではありません



水平回転が正しいと思うのは  
重力の都合でしかない

上下が反転  
左右はそのまま



## 基底画像

つまり

$$X = z_{11} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}'_1 + z_{12} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}'_2 + \cdots + z_{mm} \mathbf{r}_m \mathbf{r}'_m$$

基底画像

原画像  $X$  は、 $m^2$  個の基底画像に

それぞれ  $Z$  の各要素をかけて足し合わせたものになっている

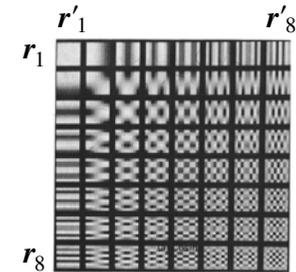
## つまり基底画像とは

原画像  $X$  は、 $m^2$  個の基底画像に

それぞれ  $Z$  の各要素をかけて足し合わせたものになっている

たとえば、64個 ( $m = 8$ ) の基底画像が、  
右のような

$r_1 \dots r_8$  と  $r'_1 \dots r'_8$  の直積になっていると  
すると



(図はA. K. Jain, Fundamentals of Digital Image Processingより転載)

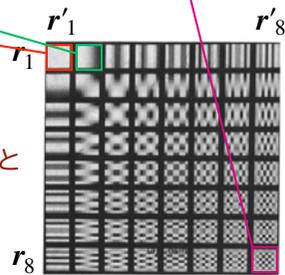
## つまり基底画像とは

原画像  $X$  は、 $m^2$  個の基底画像に

それぞれ  $Z$  の各要素をかけて足し合わせたものになっている

$$X = z_{11} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}'_1 + z_{12} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}'_2 + \cdots + z_{mm} \mathbf{r}_m \mathbf{r}'_m$$

64個 ( $m = 8$ ) の基底画像がこれだとすると



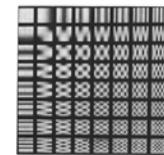
(図はA. K. Jain, Fundamentals of Digital Image Processingより転載)

## つづきは

原画像  $X$  は、 $m^2$  個の基底画像に

それぞれ  $Z$  の各要素をかけて足し合わせたものになっている

今日の最初にできた  
これ(の8×8の1つ1つ)は  
基底画像の例です👉



(図はA. K. Jain, Fundamentals of Digital Image Processingより転載)

元の関数は、いろいろな周波数の波に、

各々対応するフーリエ係数をかけて足し合わせたものになっている…

第1部の  
👉これと同じ?

原画像 $X$ は、 $m^2$ 個の基底画像に  
それぞれ $Z$ の各要素をかけて足し合わせたものになっている



元の関数は、いろいろな周波数の波に、  
各々対応するフーリエ係数をかけて足し合わせた  
ものになっている…

つまり、逆フーリエ変換？

フーリエ変換も、ユニタリー変換の一種

フーリエ変換を基本に、  
画像圧縮に適した基底画像(一部を省略しても影響が少ない基底画像)を選ぶ