

2021年度秋学期 統計学 第9回
確からしさを記述する — 確率

浅野 晃
関西大学総合情報学部



「確率」って、よく聞くけれど 🤔

※「確立」という書き間違いを見ると、かなりがっかりします 😞

※中国語では「概率」あるいは「機率」というそうです

「降水確率40%」って？

何の割合が40%？

機会

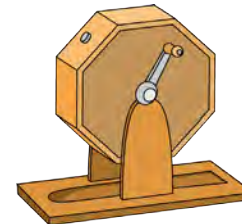
現在と同じ気象状況が
これから何度も何度も起きるとすると
そのうち40%の場合で雨になる

機会のうちの雨の割合が40%

可能性の集合

くじびき

※この機械は「新井式廻轉抽籤器」というそうです(リンク参照)



https://ilpop.com/png_season/dec01_a07.htm

↓くじをひくと

当たった！

現実には起きたのは、
これだけ

他のことは起きていない

可能性の集合

しかし



当たった

他の可能性もあった

はずれ 当たり はずれ

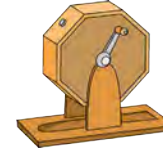
こうなるかも知れなかった

「偶然」(人知が及ばない)

[ランダム現象]という

可能性の集合

現実 可能性



当たった

はずれ 当たり はずれ

可能性のうち
どの結果になりやすいか？

を, 数値で表せないか？
(ギャンブラーの数学)

「確率」の定義

頻度による確率の定義

あるできごとがおきる確率は,
[事象] event

そのできごとがおきる可能性のある, 十分多くの機会があるとき,
[試行] trial
それらの機会のうち, そのできごとがおきる機会の数の割合

くじを十分多くの回数ひくとき, 10回中3回の割合で当たるなら, 確率0.3
十分多くの人がそれぞれ1回くじをひくと, 10人中3人の割合で当たる, でも同じ

※確率は「割合」なので, 「大きい・小さい」と表現します。「高い・低い」なのは「可能性」です。

頻度による確率の定義

あるできごとがおきる確率は、

そのできごとがおきる可能性のある
十分多くの機会があるとき、

ダウト(1) **ダウト(2)**

それらの機会のうち
そのできごとがおきる機会の数の割合

確率の定義・ダウト(1)

「十分多くの機会」?

数学でいう「十分多く」とは、

だれかが「十分ではない」といったら、
それに応じていくらでも多くすること
ができる、ということ

現実には無理 🙄

確率の定義・ダウト(2)

機会が「ある」とき?

機会が「あった」ではない

つまり、未来におきるできごとの話をしている。

未来のことはわからない。

確率を定義はしたけれど(余談)

定義することと、測ることとは別

1メートルの定義は?

※元の由来は「地球の北極から赤道までの子午線長の1000万分の1」

※現在は、「光が真空中を 299 792 458 分の1秒の間に進む距離」(「秒」の定義は略)

1キログラムの定義は?

※元の由来は「10cm立方の水の質量」

※長らく、定義は「国際キログラム原器の質量」とされてきた

※2019年5月20日以降は、プランク定数(光の振動数と光子1個のエネルギーを関係
づける定数)を $6.626\ 070\ 15 \times 10^{-34}$ (J·s) と定め、「そのような質量の単位」
がキログラムとされている

確率は測定できないけれど

「十分多くの機会」は現実には無理
未来のことはわからない

人間の思考の限界？🤔

でも

過去を未来に延長できると考える (「自然の斉一性」)

十分多くは無理でも、
「そこそこ多く」の機会があれば (「大数の法則」)
そこそこの精度で確率を推定できる

というわけで確率は

「十分多くの機会」に関する話を、次の1回の機会にあてはめている

ギャンブラーは、
日常的に賭けをしているから、
確率の大きなできごとを見抜いて賭ければ、
全体として勝つことができる

どんな名ギャンブラーでも、1回の賭けに
必ず勝つことはできない

もうひとつの確率の定義🤔

さいころで1が出る確率

なぜ1/6なのか？

$$\frac{\text{「1」は1通り}}{\text{1, 2, 3, 4, 5, 6の6通り}} = 1/6$$

確率の[ラプラスの定義]という

さっきの「頻度による定義」とは違う…

ラプラスの定義の意味

$$\frac{\begin{array}{l} n\text{回} \\ \text{「1」は1通り} \\ \hline 1, 2, 3, 4, 5, 6\text{の6通り} \\ n\text{回 } n \ n \ n \ n \ n \end{array}}{=} = \frac{n}{(6n)} = 1/6$$

1~6が皆同じ確率で出る, と認めるなら,
「同様に確からしい」 *equally likely*

さいころを6n回ふる。(nは十分大きい)

nが十分大きければ, 1~6は同じ回数出る(頻度による定義)

ラプラスの定義の意味

1~6が皆同じ確率で出る, と認めるなら
「同様に確からしい」

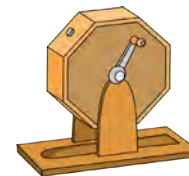
正しいと証明する方法はない

このさいころは偏っていないだろうという
「信頼」によって認めているだけ

条件付き確率と独立 🤔

統計学でいう「独立」とは

2つのランダム現象がおきるとき, 一方の結果がもう一方に影響しない



2度続けてひくとき,

1度めで出た玉を戻さなければ, 独立でない

1度めで当たりが出ると,
2度めは当たりが減っている

正確には[条件付き確率]を使って定義する

条件付き確率

「雨が降る確率」

「雨の予報が出ているときに雨が降る確率」 ← ふつう、こちらの方が大きい

条件付き確率とは、

何かがおきたときに

何かがおきるとわかったときに

何かがおきるのが確実なときに

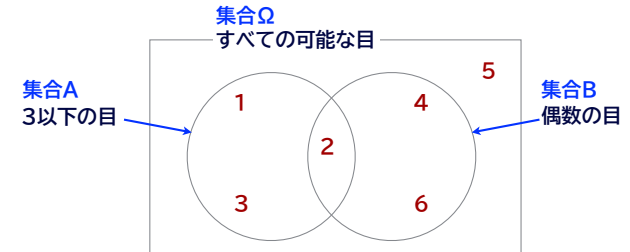
別のことがおきる確率

「何か」がおきることの影響を受けることがある
(「何か」と「別のこと」に因果関係がなくても)

さいころの例で

集合を表す「ベン図」を使って考える

さいころの「可能な目」は、1,2,3,4,5,6



集合と確率

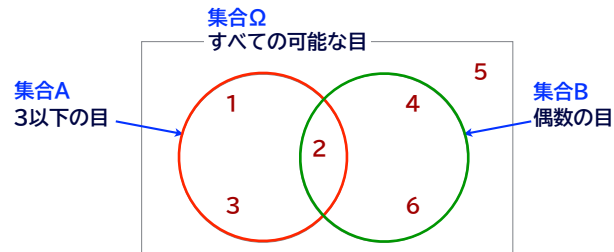
集合Xの要素の数を $|X|$ で表す

「3以下の目が出る確率」

$|A|/|\Omega| = 3/6$ $P(A)$ で表す

「偶数の目が出る確率」

$|B|/|\Omega| = 3/6$ $P(B)$ で表す



集合と確率

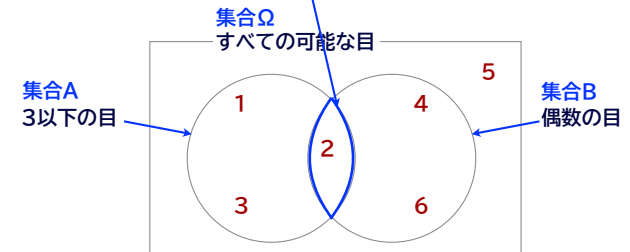
「3以下で、かつ偶数の目が出る確率」

$|A \cap B|/|\Omega| = 1/6$

$P(A \cap B)$ で表す

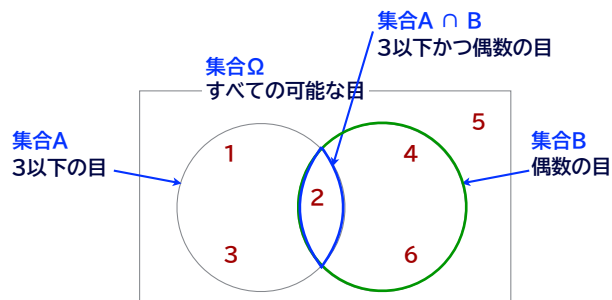
3以下でかつ偶数の目の集合

$A \cap B$ で表す



この式は何を表す？

$|A \cap B| / |B|$ 分母が Ω ではなくB
 「可能なすべての目」は、 Ω ではなくBになった



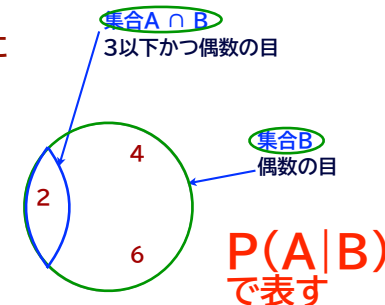
条件つき確率

$|A \cap B| / |B|$ 分母が Ω ではなくB
 「可能なすべての目」は、 Ω ではなくBになった

偶数の目が出るわかっているときに

「3以下かつ偶数」の目が出る確率

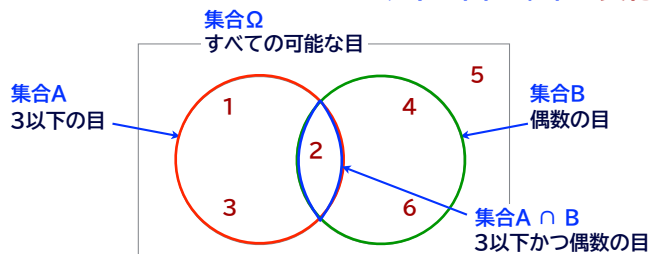
偶数が出ることを条件とする、
 3以下が出る[条件つき確率]



条件付き確率

「3以下の目が出る確率」 $P(A) = |A| / |\Omega| = 3/6 = 1/2$
 偶数が出ることを条件とする、
 3以下が出る条件つき確率 $P(A|B) = |A \cap B| / |B| = 1/3$

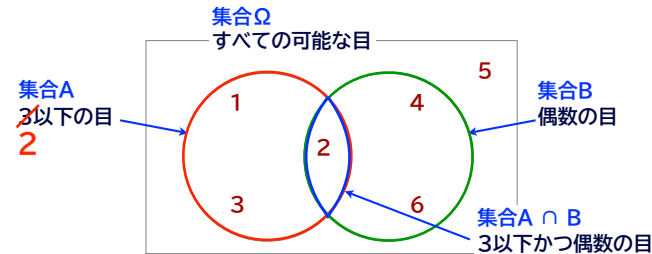
「偶数が出る」という情報によって、
 3以下が出る確率が変化した



「2以下の目」だったら

「2以下の目が出る確率」 $P(A) = |A| / |\Omega| = 2/6 = 1/3$
 偶数が出ることを条件とする、
 2以下が出る条件つき確率 $P(A|B) = |A \cap B| / |B| = 1/3$

つまり $P(A) = P(A|B)$



「独立」

「2以下の目が出る確率」 $P(A) = |A| / |\Omega| = 2/6 = 1/3$

偶数が出ることを条件とする、
2以下が出る条件つき確率

$$P(A|B) = |A \cap B| / |B| = 1/3$$

つまり $P(A) = P(A|B)$ 2以下が出る確率は、「偶数が出る」という
情報によっても、変化しない

$P(A) = P(A|B)$ のとき「事象Aと事象Bは独立」という

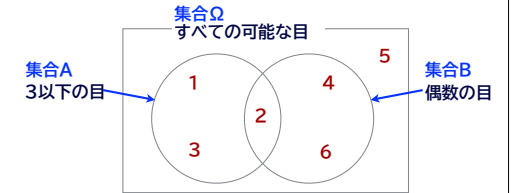
AとBが独立 = 「Bが起きる」ことがわかってても、
Aが起きる確率には影響がない

確率の積の法則

Bを条件とする、Aの条件つき確率

$$\begin{aligned} P(A|B) &= |A \cap B| / |B| \\ &= (|A \cap B| / |\Omega|) / (|B| / |\Omega|) \\ &= P(A \cap B) / P(B) \end{aligned}$$

つまり
 $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$



確率の積の法則

$$P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B)$$

AとBの両方が
起きる確率

とりあえずBが
起きるものとして、
そのときにAが起きる確率

ところで、
Bが本当に起きる確率

AとBが独立のときは、 $P(A|B) = P(A)$ だから

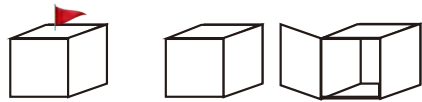
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

AとBが独立のときだけ、こうなることに注意 ※勝手に独立にはいけません。

モンティ・ホール問題 ▶

モンティ・ホール問題

モンティ・ホール氏が司会するテレビ番組
箱が3つあり、ひとつだけに賞品がある。
ゲストが箱をひとつ選ぶが、まだ開けない
モンティは賞品のありかを知っている。
彼は「ゲストが選ばなかった空箱」を1つ開けて

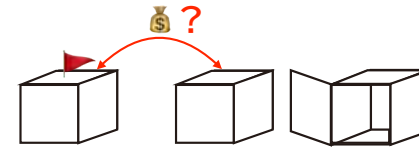


モンティ・ホール問題



「いまなら、さっき選んだ箱ではなく、
まだ開けていないもう1つの箱を選んでかまいません」

選ぶ箱を変えるほうが、当たる確率が大きくなるか？



答えは

ゲストが選ぶ箱を変えないと、当たる確率1/3
箱を変えると、当たる確率2/3

箱は残り2つだから、当たる確率は、
箱を変えても変えなくても1/2じゃないの？

※違います。「勝手に同確率」にはいけません。

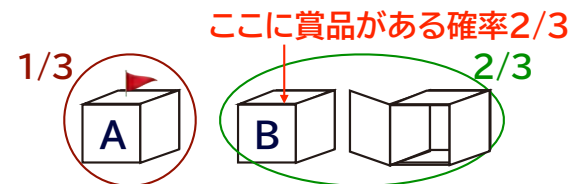
もっとも簡単な説明

箱をA,B,Cとし、ゲストがAを選んだとする

賞品が Aにある確率 1/3

「BまたはC」にある確率 2/3

モンティが開けるのは必ず空の箱 → 上の確率は、
箱を開けても変わらない



本当に正しいか？

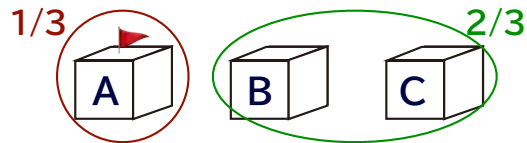
賞品が Aにある確率 $1/3$

「BまたはC」にある確率 $2/3$

この確率は、
箱を開けても変わらない

本当か？

「モンティは、賞品がある箱は開けない」



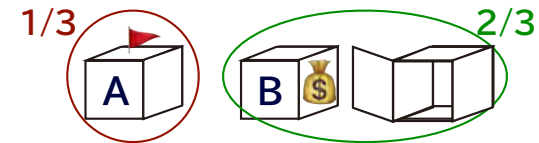
本当に正しいか？

「モンティは、賞品のある箱は開けない」

賞品がBにあるなら、Cしか開けられない

賞品がCにあるなら、Bしか開けられない

「BまたはCにある確率 $2/3$ 」は、箱を開けても変わらない



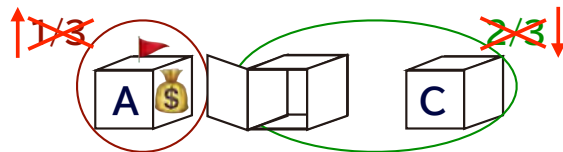
本当に正しいか？

「モンティは、賞品のある箱は開けない」

賞品がAにあるときは？ モンティはB,Cのどちらを開けてもよい

もしも「賞品がAにあるときは、必ずBを開ける」という裏ルールがあったら？

モンティがBを開けたら、賞品はAにある可能性が高い



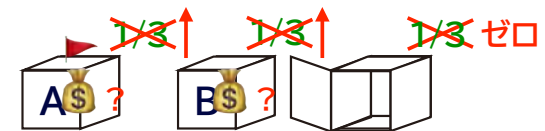
本当に正しいか？

「モンティは、賞品のある箱は開けない」

モンティが、↑これを守ってなかったら？

モンティは、実はA,B,Cを同じ確率でランダムに選んでおり、今回たまたまCを開けたら空だった、としたら

賞品がA,Bにある確率が平等に大きくなる



この問題のポイントは

モンティの行動は、賞品のありかを知る手がかりになっているか？

それは、「他にどんな可能性があったか」によって変わる

それには、モンティの「心の中」が影響します。

