2021年度秋学期　統計学　　第13回

# 不確かな測定の不確かさを測る
## ― 不偏分散とt分布

浅野　晃
関西大学総合情報学部

# ちょっと（ほんのちょっと）
# 前回までの復習

## 正規分布の場合の区間推定

例題

母集団
（受験者全体）

母平均$\mu$

正規分布
と仮定する

標本X1, … Xnをとりだす
サイズn

標本平均 $\overline{X}$

母平均$\mu$の95%信頼区間が知りたい

母分散$\sigma^2$がわかっているものとする（説明の都合です）

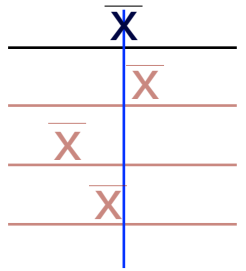


## 区間推定の考え方

数値をいくつか抽出して標本平均

仮に，何度も抽出したとすると

標本平均の期待値
＝母平均




標本平均にすることで
ばらつきが小さくなる

標本平均の分散
＝母分散÷標本サイズ

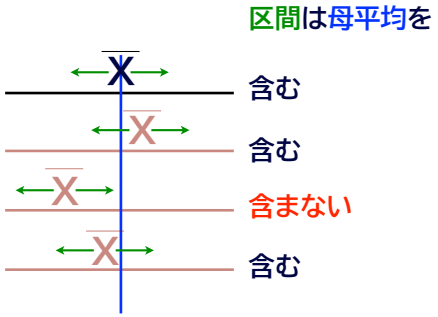
母平均（実際にはわからない）
のまわりにばらついている

## 区間推定の考え方

標本平均の左右に区間をつける

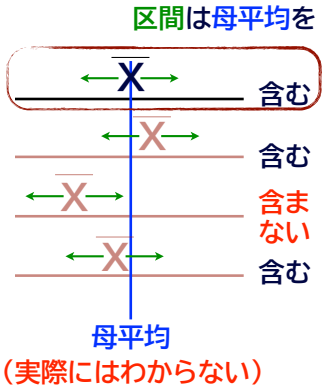
どの回の区間が母平均を含むか・含まないかはわからないが

確率95%で
母平均を含むように
区間を設定できる






## 信頼区間




確率95%で
母平均を含むように計算した区間だから，
1回だけ計算した区間でも含むと信じる

母平均の
[信頼係数]95%の
[信頼区間] という
([95%信頼区間])



## 不偏分散💡

## 正規分布の場合の区間推定

例題

母集団
（受験者全体）

母平均$\mu$

正規分布
と仮定する

標本 $X_1, \ldots X_n$ をとりだす
サイズ $n$

標本平均 $\bar{X}$

母平均 $\mu$ の95%信頼区間が知りたい

母分散 $\sigma^2$ がわかっているものとする（説明の都合です）

## 母分散は，ふつうはわからない

母集団全体は調べていないし，母平均もわからない
（わからないから，いま推定しようとしている）

それなのに，母分散がわかるはずがない

母分散の「代用品」を，標本を使って計算できないか。



## 標本を使って分散を計算

分散＝(偏差)$^2$の平均
（データの各数値)ー(データの平均)

標本を使って分散を計算する。

データ： 標本 $X_1$, ... $X_n$
データの平均： 本当は母平均だが，
わからないので標本平均 $\bar{X}$ で代用



## 標本を使って分散を計算

標本を使った分散

$$S^2 = \frac{1}{n}\{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \cdots + (X_n - \bar{X})^2\}$$

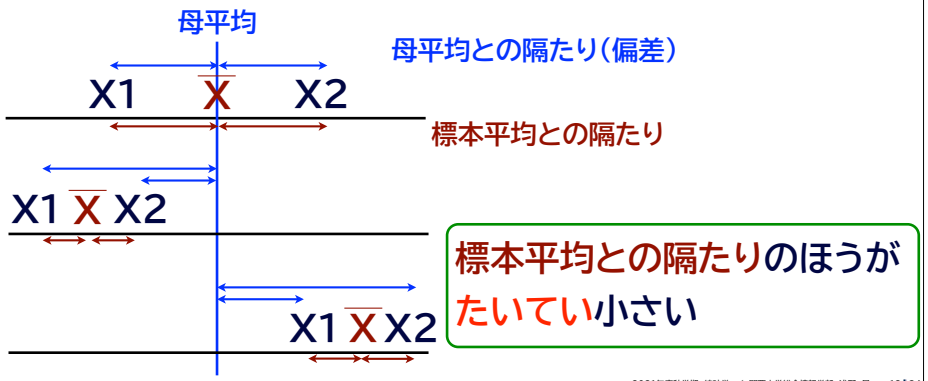
標本サイズで割る

分散＝(偏差)$^2$の平均
だから当然だけど… 本当にこれでいいの？



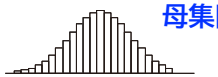
## 標本平均を用いた偏差

標本サイズ n=2 とする 標本は X1, X2

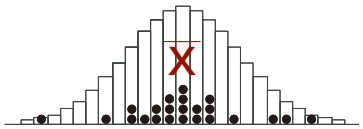


## 標本平均を用いた偏差

別の説明

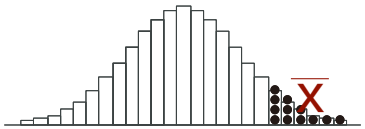


母集団の度数分布




これなら
「標本平均との隔たり」と
「母平均との隔たり」は
かわらない

こんなふうに偏っていると
「標本平均との隔たり」
のほうが小さい






## 不偏分散

母平均との隔たりよりも
標本平均との隔たりのほうが
たいてい小さい

標本平均との隔たりを使って分散を計算すると，
母分散よりもたいてい小さめになる

では，計算のときに少し大きめにしておけば？



## 不偏分散

計算のときに少し大きめにする

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \cdots + (X_n - \bar{X})^2\}$$

（標本サイズ − 1）で割る

これを不偏分散（不偏標本分散）といい，
母分散の代用に用いる

「不偏」とは？



## 「不偏」とは？

標本平均との隔たりを使って分散を計算すると，
母分散よりもたいてい小さめになる

計算のときに少し大きめにすると？

母分散と一致するわけではないが
母分散より大きくも小さくも平等にはずれる

「不偏」とは「えこひいきしない」こと

## 標本サイズ=2のときに，式で書いてみると

標本サイズ=2のとき，標本を $X_1, X_2$ ，標本平均を $\bar{X}$ とすると
不偏分散 $s^2$ は　$s^2 = \frac{1}{2-1}\{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2\}$

{}内は，2つの「へだたり」の2乗の和？ $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}$ を代入すると

$$s^2 = \frac{1}{2-1}\left\{(X_1 - \frac{X_1+X_2}{2})^2 + (X_2 - \frac{X_1+X_2}{2})^2\right\}$$
$$= \frac{1}{2-1}\left\{\left(\frac{X_1 - X_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{X_2 - X_1}{2}\right)^2\right\}$$
$$= \frac{1}{2-1}\left\{\frac{(X_1 - X_2)^2}{2}\right\}$$

「へだたり」は，ひとつしかない

だから，2で割らずに1で割る



## 不偏分散を用いた区間推定💡

## 正規分布の場合の区間推定

前回の例題

ある試験の点数の分布は正規分布であるとします。

この試験の受験者から，10人からなる標本を無作為抽出して，
この人たちの点数を平均したところ50点でした。

この試験の受験者全体の標準偏差が5点であるとわかっている
とき，受験者全体の平均点の95%信頼区間を求めてください。



## 正規分布の場合の区間推定

例題

母集団
（受験者全体）

母平均$\mu$

正規分布
と仮定する

標本 $X_1$, ... $X_n$ をとりだす
サイズ $n$

標本平均 $\bar{X}$

母平均 $\mu$ の95%信頼区間が知りたい

母分散 $\sigma^2$ がわかっているものとする（説明の都合です）

## 正規分布の場合の区間推定

**考え方**

標本は，母集団分布と同じ確率分布にしたがう
正規分布N($\mu$，$\sigma^2$)

標本平均は，やはり正規分布にしたがうが，
分散が1/nになる　［性質2］
正規分布N($\mu$，$\sigma^2$/n)



## 正規分布の場合の区間推定

**考え方**

標本は，母集団分布と同じ確率分布にしたがう
正規分布N($\mu$，$\sigma^2$)

$\bar{X}$
標本平均は，やはり正規分布にしたがうが，分散が1/nになる
［性質2］　正規分布N($\mu$，$\sigma^2$/n)

正規分布の［性質1］により

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}$$ は標準正規分布にしたがう
N(0，1)



## 本当は，母分散はわからない

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}$$ は標準正規分布にしたがう
N(0，1)

本当は母分散はわからない

不偏分散で代用する

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$$ 不偏分散　　t は何分布にしたがう？



## t分布

t統計量　$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$　は

自由度(n−1)のt分布にしたがう
t(n−1)

（「スチューデントのt分布」という）

発見者ウィリアム・ゴセットのペンネーム

※ゴセットはギネスビールのエンジニアで，会社との契約のために論文を発表できなかったので，ペンネームで論文を発表した。

## 正規分布(母分散不明)の場合の区間推定

**テキストの例題**

ある試験の点数の分布は正規分布であるとします。

この試験の受験者から，10人からなる標本を無作為抽出して，
この人たちの点数を平均したところ50点でした。

この10人の不偏分散が$5^2$点であるとき，受験者全体の平均点
の95%信頼区間を求めてください。

前回は
「受験者全体の標準偏差が5点であるとわかっている」



## 正規分布の場合の区間推定

**例題**

母集団
(受験者全体)

標本 $X_1, \ldots X_n$ をとりだす
サイズ $n$

標本平均 $\bar{X}$

母平均$\mu$

正規分布
と仮定する

母平均 $\mu$ の95%信頼区間が知りたい

母分散 $\sigma^2$ がわからないので， 不偏分散 $s^2$ で代用

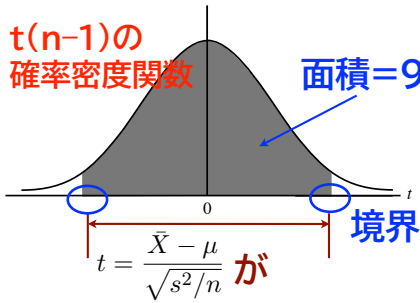


## t分布を用いた区間推定

$t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$ は自由度(n−1)のt分布にしたがう
t(n−1)

t(n−1)の
確率密度関数

面積=95%

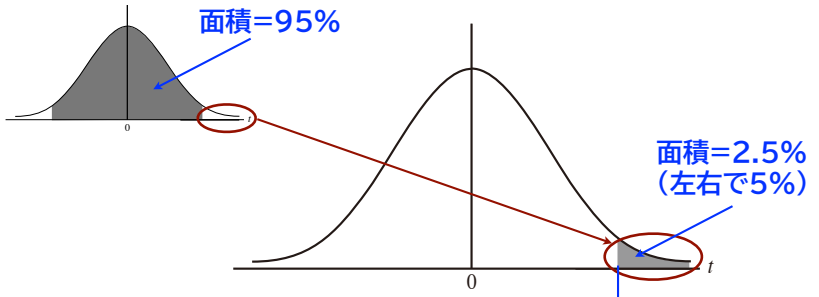



境界の値はいくら？

$t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$ が
この区間に入っている確率=95%とすると

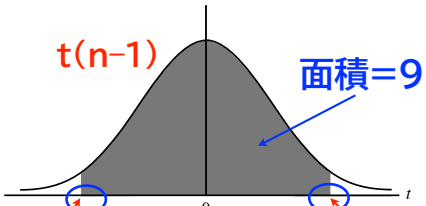


## t分布を用いた区間推定




境界の値は自由度によってちがうので
$t_{0.025}(n-1)$ としておく [上側2.5%点]

## t分布を用いた区間推定




$t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$ が

この区間に入っている確率=95%

$-t_{0.025}(n-1)$　　$t_{0.025}(n-1)$



## t分布を用いた区間推定

$t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$ が $-t_{0.025}(n-1)$ と $t_{0.025}(n-1)$ の間に入っている確率が95%

式で書くと $P\left(-t_{0.025}(n-1) \leqq \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} \leqq t_{0.025}(n-1)\right) = 0.95$

μの式に直すと

$$P\left(\bar{X} - t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}} \leqq \mu \leqq \bar{X} + t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}}\right) = 0.95$$



## t分布を用いた区間推定

例題では

標本平均=50　　不偏分散=25　　標本サイズ=10

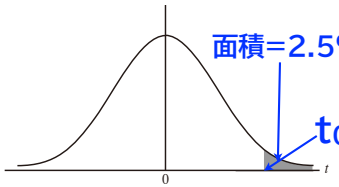
$$P\left(\bar{X} - t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}} \leqq \mu \leqq \bar{X} + t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}}\right) = 0.95$$

μの95%信頼区間の下限　　μの95%信頼区間の上限

上側2.5%点　$t_{0.025}(n-1)$　は？



## t分布表




パーセントの値　0.025

| 自由度 | 0.40 | 0.30 | 0.25 | 0.20 | 0.15 | 0.10 | 0.05 | 0.025 | 0.01 | 0.005 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.3249 | 0.7265 | 1.0000 | 1.3764 | 1.9626 | 3.0777 | 6.3138 | 12.7062 | 31.8205 | 63.6567 |
| 2 | 0.2887 | 0.6172 | 0.8165 | 1.0607 | 1.3862 | 1.8856 | 2.9200 | 4.3027 | 6.9646 | 9.9248 |
| 3 | 0.2767 | 0.5844 | 0.7649 | 0.9785 | 1.2498 | 1.6377 | 2.3534 | 3.1824 | 4.5407 | 5.8409 |
| 4 | 0.2707 | 0.5686 | 0.7407 | 0.9410 | 1.1896 | 1.5332 | 2.1318 | 2.7764 | 3.7469 | 4.6041 |
| 5 | 0.2672 | 0.5594 | 0.7267 | 0.9195 | 1.1558 | 1.4759 | 2.0150 | 2.5706 | 3.3649 | 4.0321 |
| 6 | 0.2648 | 0.5534 | 0.7176 | 0.9057 | 1.1342 | 1.4398 | 1.9432 | 2.4469 | 3.1427 | 3.7074 |
| 7 | 0.2632 | 0.5491 | 0.7111 | 0.8960 | 1.1192 | 1.4149 | 1.8946 | 2.3646 | 2.9980 | 3.4995 |
| 8 | 0.2619 | 0.5459 | 0.7064 | 0.8889 | 1.1081 | 1.3968 | 1.8595 | 2.3060 | 2.8965 | 3.3554 |
| 9 | 0.2610 | 0.5435 | 0.7027 | 0.8834 | 1.0997 | 1.3830 | 1.8331 | 2.2622 | 2.8214 | 3.2498 |

例題では n−1 = 9　　$t_{0.025}(9)$=2.262

## t分布を用いた区間推定

例題では

t0.025(10−1)=2.262

標本平均=50　不偏分散=25　標本サイズ=10

$$P\left(\bar{X}-t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}} \leqq \mu \leqq \bar{X}+t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}}\right)=0.95$$

μの95%信頼区間の下限　　μの95%信頼区間の上限

計算すると，例題の答は
「46.4以上53.6以下」( [46.4, 53.6] )



## 前回の例題と比較

どちらも 標本平均=50 標本サイズ=10

母平均の95%信頼区間は

母分散=25 のとき　[46.9, 53.1]

不偏分散=25 のとき　[46.4, 53.6]

不偏分散は，母分散の推定量なので，不確か
→信頼区間が広い