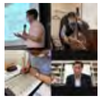
2022年度秋学期 応用数学（解析）　第3回

第1部・「無限」の理解 **実数とは何か**

浅野 晃
関西大学総合情報学部



拡張されていく「数」🤔

拡張されていく「数」

実数

…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …

整数　自然数

…, 2/3, 1/2, 1/3, …　有限小数と循環する無限小数

有理数

$\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$

π, e　循環しない無限小数

無理数

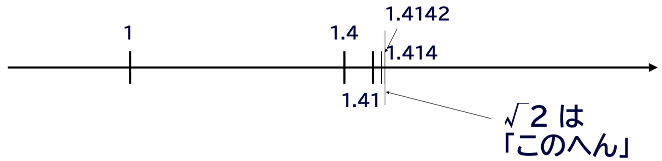
今日扱うのは「実数の連続性を示す方法」

いくつか挙げますが，どれも等価です

無限小数とカントールの公理🤔

点と区間

「循環しない無限小数」は，
数直線上の一つの「点」なのか？

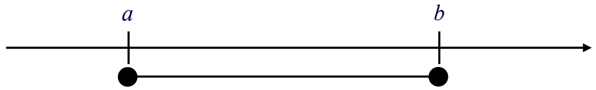


√2 は本当に「点」か？　よくわからない…

点ではなく[区間]で考える

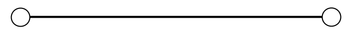
閉区間と開区間

$a < b$ のとき，a と b の間にある数の集合→[区間]



両端を含む　[閉区間]$[a, b]$

最小値はa，最大値はb



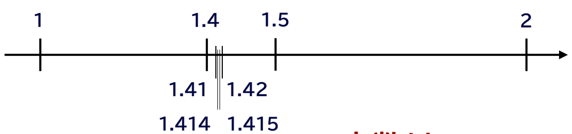
両端を含まない　[開区間](a, b)

最小値・最大値が存在するかどうかは，数の種類による

カントールの公理

循環しない無限小数 √2 = 1.4142135…

無限に桁数を増やすと，ひとつの実数を表せるのか？



$[1, 2]$

$[1.4, 1.5]$

$[1.41, 1.42]$

$[1.414, 1.415]$

⋮

実数は，
「入れ子」の閉区間の極限で定義する

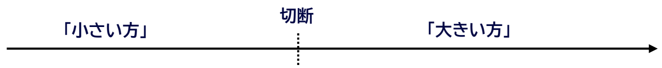
その極限が，√2 = 1.4142135…であるとする

実数とデデキントの切断✂️

デデキントの切断

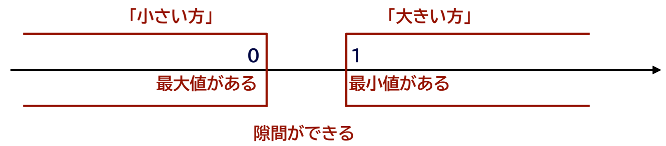
数直線をある場所で切断し，
数の集合を「大きい方」と「小さい方」に分ける

（ある集合の）すべての数を，
一方の組のどの数も
もう一方の組のどの数よりも小さくなるように，
2つの組に分ける



整数の切断

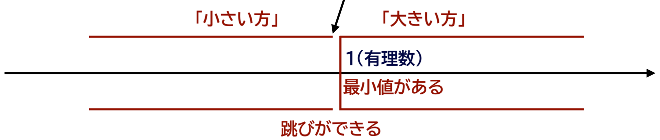
整数の場合



有理数の切断

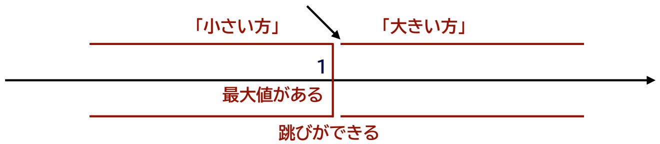
有理数の場合

「小さい方」の最大値がない
1よりも小さく
1にいくらでも近い有理数が存在する



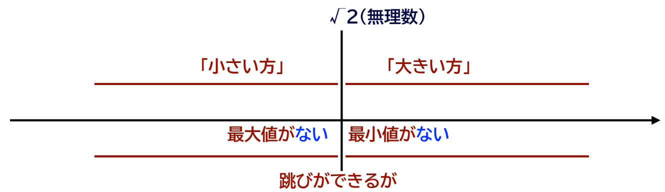
［稠密性］

「大きい方」の最小値がない
1よりも大きく
1にいくらでも近い有理数が存在する



有理数の切断

有理数の場合こういう場合もある



√2よりも小さく
√2にいくらでも近い有理数も

√2よりも大きく
√2にいくらでも近い有理数も

どちらも存在する

「稠密」とは，
いくらでも細かく「びっしり」と
毛の植わっているブラシのようなもの

実数の切断

実数は，必ず下のどちらかになる　　稠密な上に［連続性］

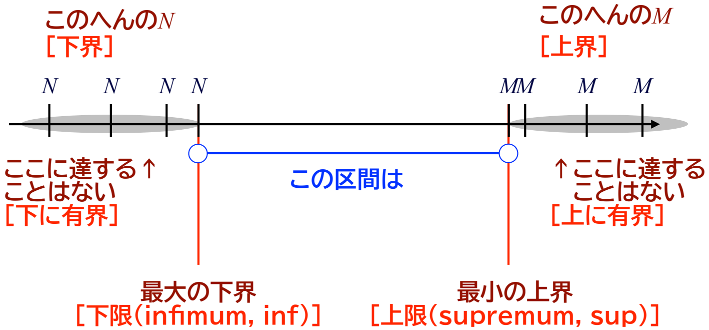
実数とは，「切断の切り口」である

「連続」とは，「べったり」と塗り付けられた塗料のようなもの

上限と下限
ワイエルシュトラスの定理🤔

有界，上界・下界，上限・下限

開区間には最大値も最小値もないが，
上にも下にも限界はある



ワイエルシュトラスの定理

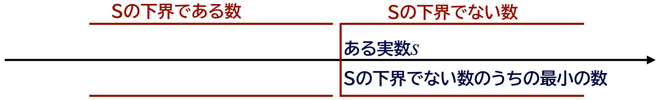
実数からなる集合が下（上）に有界ならば
必ず下限（上限）が存在する　　デデキントの切断から導ける

実数からなるある集合Sが，下に有界とすると，

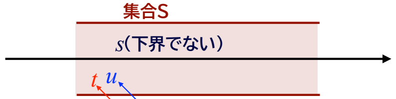
どちらかの切断を形成し，実数sが定まる。
下の切断なら，下限（最大の下界）が存在する。上の切断にならないことを示す

ワイエルシュトラスの定理

こちらの切断だとすると



実数 s は, 集合Sの下界でない数だから, 集合Sを見ると



s より小さな数 t が, 集合Sに属しているはず

s と t の間にある数 u も, 集合Sに属しているはず

u は t より大きいから, u は「集合Sの下界ではない数」である

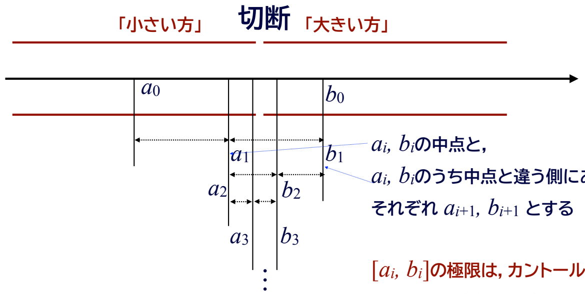
s は u より大きい。

これは, 「s は 集合Sの下界ではない数のうちで最小」に矛盾　つまり, 「こちらの切断ではない」

実数を定義する
各公理・定理間の関係🤔

カントールの公理とデデキントの切断

カントールの公理によって定まる実数は,
デデキントの切断によって切り口に現れる実数と同じか？

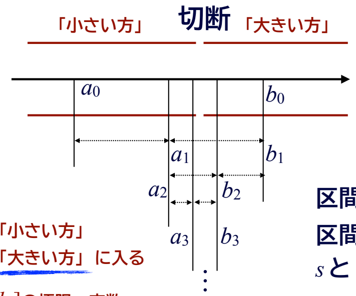


a_i, b_iの中点と,
a_i, b_iのうち中点と違う側にある点を,
それぞれ a_{i+1}, b_{i+1} とする

$[a_i, b_i]$の極限は, カントールの公理に
より, 1つの実数 s を定める

この s は, デデキントの切断による「切り口」にあるか？

カントールの公理とデデキントの切断



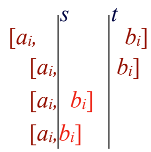
実数 s が「小さい方」に属するとする

s より大きい数 t については
どんなに t が s に近くても

区間$[a_i, b_i]$がsに到達する途中で
区間の右端(「大きい方」)が
s と t の間に入るときがあるはず

a_i は「小さい方」
b_i は「大きい方」 に入る

$[a_i, b_i]$の極限＝実数 s



t は「大きい方」に属する

s は「小さい方」の最大値である
「大きい方」に最小値はない
→ s は切断の切り口で, 「小さい方」にある

実数の連続性を示すさまざまな公理

カントールの公理　実数は入れ子の閉区間の極限

デデキントの切断による公理　実数は切断の「切り口」

ワイエルシュトラスの定理
実数の集合が有界ならば，上限か下限がある

実数の有界な単調数列は収束する　（これは次回）

いずれも同値である

連続性裁判
～こんな数学，何か役に立つの？～🤔

連続性裁判

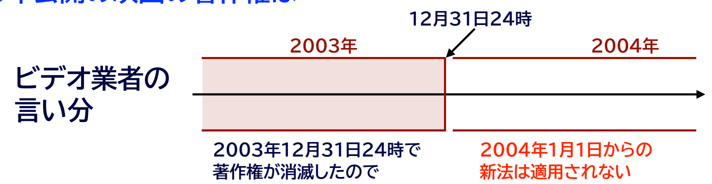
映画の著作権

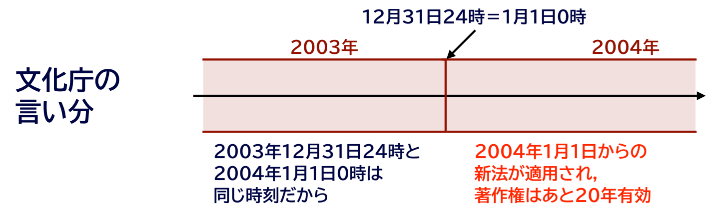
公開から50年後の年の年末まで有効
→2004年1月1日から「70年」に延長

1953年公開の映画の著作権は
50年後の2003年末で消滅？

連続性裁判

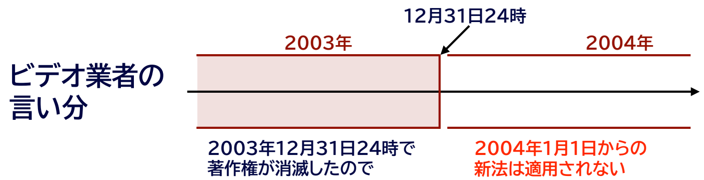
1953年公開の映画の著作権は





裁判の結果は

「2003年12月31日24時」と「2004年1月1日0時」の
2つの名前が同じ時刻をさすことはない



こちらが認められた。

「時の流れは連続」

今日のまとめ

実数の「連続性」

実数の連続性を示す方法

カントールの公理
デデキントの切断による公理
ワイエルシュトラスの定理