2022 年度秋学期　応用数学（解析）　第４回

第１部・「無限」の理解／　収束とは何か，ε‑δ 論法

微分 ― なんかごまかされている気がする

微分を初めて習った時，例えば「$f(x) = x^2$ を x で微分せよ」という問題を次のように説明されたと思います。

$$\begin{aligned}\frac{df(x)}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x\end{aligned} \tag{1}$$

上の説明では，３行目で「h は 0 に近づいているだけで，まだ 0 ではないから」といって h で割っているのに，４行目では「h は 0」としています。これはおかしくありませんか？

この問題を解決するには，「収束」を正確に理解する必要があります。今日は，「限りなく近づく」という言葉で表されている「収束」について考えてみます。

数列の収束

ε‑N 論法

「数列 $\{a_n\}$ が α に収束する」とは，数学では次のような意味だと理解されています。

> α のまわりにどんなに狭い区間 $[\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon]$ を設定しても[1],
> 数列が十分大きな番号 N まで進めば,
> N 番より大きな番号 n については，a_n はみなその狭い区間 $[\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon]$ に入る。

これを，数学の表現では

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N; n > N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon \tag{2}$$

と書き，これを **ε‑N 論法**とよびます。図１の「４コマ漫画」で，この様子を説明しています。

同様に，「$n \to \infty$ のとき，数列 $\{a_n\}$ が ∞ に発散する」とは

> どんなに大きな数 G をもってきても,
> 数列が十分大きな番号 N まで進めば,
> N 番より大きな番号 n については，a_n は G より大きくなる。

すなわち

$$\forall G, \exists N; n > N \Rightarrow a_n > G \tag{3}$$

であることを意味しています。

[1] “ε” は，数学ではしばしば「すごく小さな（好きなだけ小さくできる）正の数」をさします。

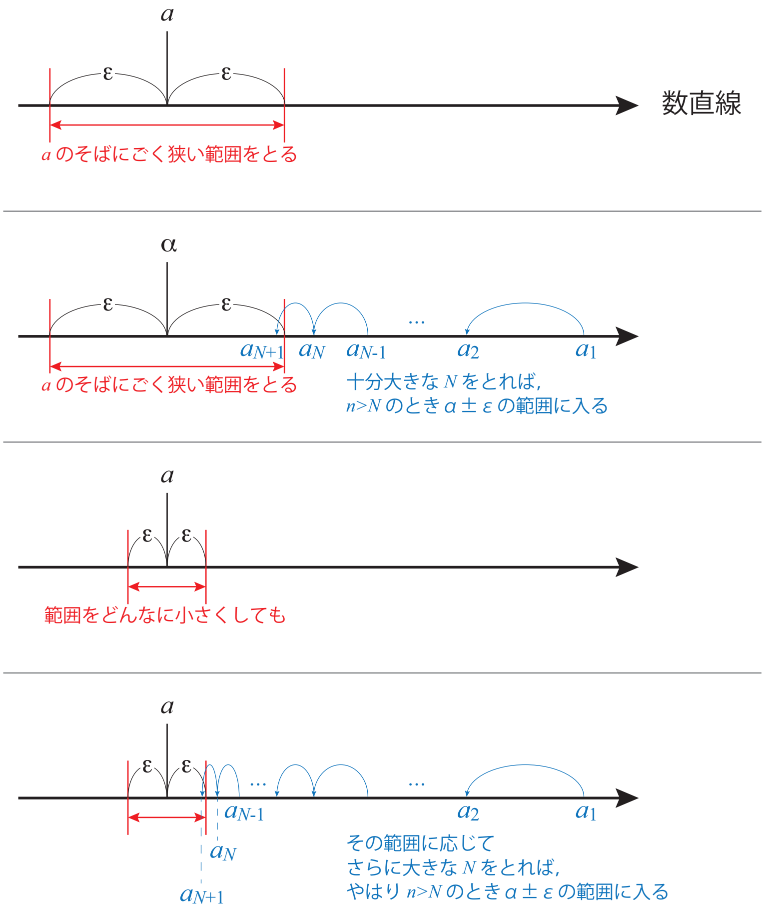

図 1: $\varepsilon - N$ 論法

「限りなく近づく」の意味 ー「無限」ではない！

このような収束や発散の理解では，ε は好きなように小さくできますが，あくまで正の数であって，0 ではありません。G は好きなように大きくできますが，あくまで，ある有限の数であって，「無限」ではありません。

つまり，「限りなく近づく」とは「隔たりを必要に応じて好きなだけ小さくすることができる」という意味であり，「限りなく大きくなる」とは「必要に応じて好きなだけ大きくすることができる」という意味であって，「無限に近づく」「無限に大きくなる」という意味を入れずに定義されているのです。

実数の連続性の，もうひとつの公理

前回説明した，実数の連続性を述べる 4 つの公理のうち，「実数の有界な単調数列は収束する」ことに関しては，前回は説明していませんでした。これを，「実数からなる集合が上 (下) に有界であれば, 必ず上限 (下限) が存在する」という Weierstrass の定理から導いてみます。

なお，数列 $\{a_n\}$ が単調増加であるとは，$a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$ であることをいいます。不等号に等号がついて “$\leqq$” になっている場合は広義の単調増加（あるいは単調非減少）といいます。単調減少は不等号が逆の場合です。

単調に増加する数列 $\{a_n\}$ が有界ならば，Weierstrass の定理により上限 α が存在します。このとき，$\alpha' < \alpha$ となるような α' を用意します。この数列は単調増加ですから，ある番号 p 以降の a_n $(n > p)$ は，α' よりも大きく，一方上限 α 以下ではあるはずです。つまり $\alpha' < a_n \leqq \alpha$ $(n > p)$ です。よって，α と a_n の隔たりは α と α' の隔たりよりも小さい，すなわち $|\alpha - a_n| < \alpha - \alpha'$ となります。α' は，α より小さければどれだけ α に近くてもよいので，$\alpha - \alpha'$ を上の収束の定義の ε と考えると，$\{a_n\}$ は α に収束することがわかります。■

例題

$a > 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ であることを証明せよ。

解答例

$k > 2a$ であるような番号 k をもってきて，$\dfrac{a^k}{k!} = C$ とおきます。すると，$n > k$ のとき

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^k}{k!} \times \frac{a}{k+1} \times \frac{a}{k+2} \times \cdots \times \frac{a}{n} = C \times \frac{a}{k+1} \times \frac{a}{k+2} \times \cdots \times \frac{a}{k+(n-k)} \tag{4}$$

で，$k > 2a$ ですから

$$\begin{aligned} \frac{a^n}{n!} &< C \times \frac{a}{2a+1} \times \frac{a}{2a+2} \times \cdots \times \frac{a}{2a+(n-k)} \\ &< C \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{C \cdot 2^k}{2^n} < \frac{C \cdot 2^k}{n} \end{aligned} \tag{5}$$

とすることができます。そこで，ある（小さな）正の数 ε をもってきて，$n > \dfrac{C \cdot 2^k}{\varepsilon}$ となる n を考えると，上の式に代入して $\dfrac{a^n}{n!} < \varepsilon$ となります。すなわち，$\dfrac{a^n}{n!}$ は 0 に収束します。■

関数の極限

ε-δ 論法

ここまでに述べた数列の収束と同じ論法を使って，「関数 $f(x)$ の $x \to a$ の極限が A である」すなわち $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = A$ であることは，次のように定義されます。

> どんなに小さな正の数 ε を持ってきても，
> x と a の隔たりをある δ より小さくすれば，
> $f(x)$ と A の隔たりも ε より小さくできる。

これを，数学の表現では

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0; 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \tag{6}$$

と書きます。この表現を **ε-δ 論法**とよびます[2]。

[2] ε-N 論法も ε-δ 論法に含めて，総称して ε-δ 論法ということもあります。

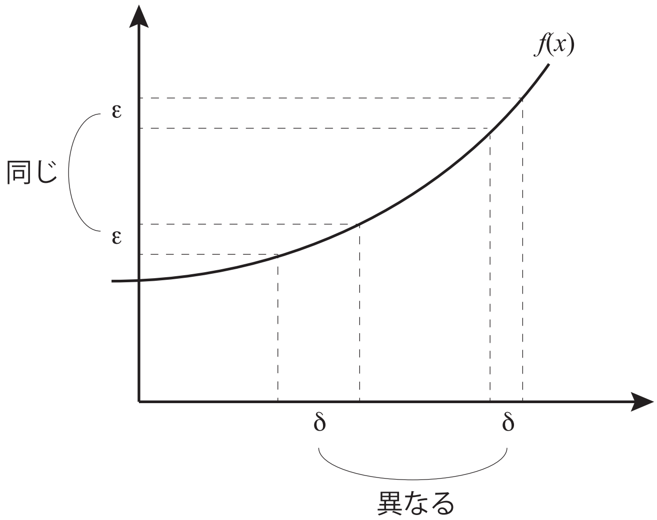

図 2: 同じ ε に対しても，必要な「δ の小ささ」は異なる

最初の微分の話は

この定義で，最初に述べた微分の問題を考えてみると，$h \to 0$ という表現では，h は δ より小さいだけであってあくまで 0 ではないので，割り算をしてもいい，ということになります。最後の行で $h = 0$ としているのは，収束する先が $h = 0$ とした時の値と同じ，というだけです。

左極限と右極限

なお，関数の極限については「上のことが x が a にどの方向から近づいてもなりたつとき」という条件がついています。「方向」の違いとは，例えば x が a より小さくて a に近づくのか，a より大きくて a に近づくのか，という違いです。前者の場合のみ得られる極限を**左極限**，後者の場合のみ得られる極限を**右極限**といい，それぞれ $\lim_{x\to a-0}$，$\lim_{x\to a+0}$ と書きます。

関数の連続性と一様連続性

連続の「程度」

関数 $f(x)$ の $x \to a$ の極限が $f(a)$ であるとき，$f(x)$ は a で**連続**であるといいます。 ε-δ 論法で書くと

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{7}$$

となります。さらに，関数 $f(x)$ が区間 I のどの点でも連続のとき，$f(x)$ は区間 I で連続といいます。

さて，$\varepsilon - \delta$ 論法を用いると，同じ「$x = a$ で連続」な関数にも「連続の程度」を考えることができます。つまり，$f(x)$ と $f(a)$ の隔たりがある ε より小さくなるとき，x と a との隔たりをどのくらい小さくすればよいか，つまり δ をどのくらい小さくすればよいか，という問題です（図 2)。

一様連続

区間 I 内のどの点 a についても，$f(x)$ と $f(a)$ の隔たりをある ε より小さくするためには，x と a との隔たりをひとつの<u>共通の δ</u> より小さくすればよいとき，$f(x)$ は区間 I で**一様連続**であるといいます。区

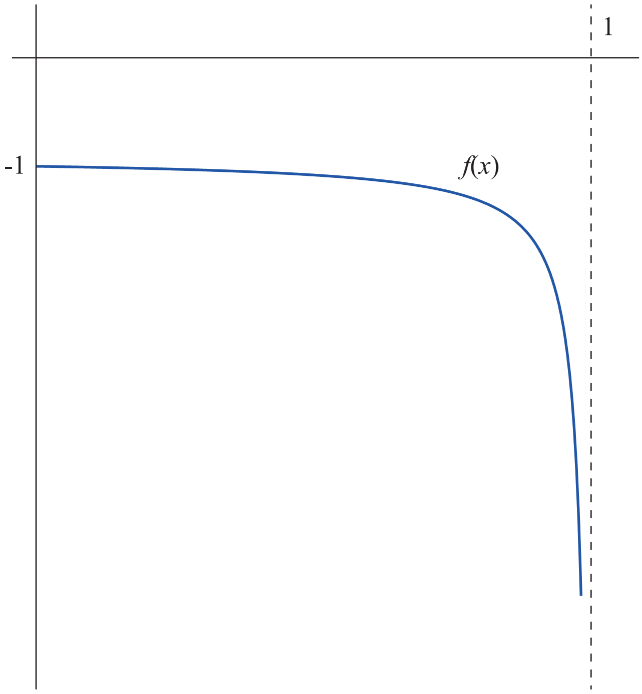

図 3: 連続だが一様連続でない関数

間 I が閉区間なら，δ は区間内で必要な最小のものにすればよいので，区間 I で連続な関数はつねに一様連続です[3]。

連続だが一様連続ではない例

しかし，区間 I が開区間のときは，「連続なのに一様連続でない」関数があります。例えば，区間 $[0,1)$ で関数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ を考えます（図 3）。この区間内では，x が 1 にいくらでも近づけば，x のどんな小さな変化に対しても，$f(x)$ はいくらでも大きく変化します。したがって，ひとつの $f(x)$ と $f(a)$ の隔たり ε に対して，区間内で共通の δ をとることができず，一様連続ではありません。

もう少し正確に書いてみましょう。$x_n=1-\dfrac{1}{2n}$，$a_n=1-\dfrac{1}{n}$ とすると，$x_n-a_n=\dfrac{1}{2n}$ で，$|f(x_n)-f(a_n)|=n$ です。ですから，n を大きくすれば x_n と a_n の隔たりをある δ よりも小さくすることはできますが，そのとき $f(x_n)$ と $f(a_n)$ の隔たりを ε より小さくすることはできません。

関数列の収束

各点収束

ここまでの知識を用いると，数列でなく「関数の列」$f_1(x), f_2(x), \ldots$ の収束を考えることができます。つまり，$n\to\infty$ のとき，区間 I の各点 x で $|f_n(x)-f(x)|\to 0$ となることを，関数列 $f(x)$ は区間 I で**各点収束**するといいます。

[3]正確な証明は略します。

一様収束

ここで, 一様連続の説明で述べた「連続の程度」と同じように, 区間 I 内の各点での「収束の程度」を考えます。すると, 関数列である番号 N より先の関数 $f_n(x)$ $(n > N)$ については, 区間 I 内のどの点 x でも $f_n(x)$ と $f(x)$ の隔たりを ε より小さくできる，という収束のしかたを考えることができます。これを，関数列 $f(x)$ は区間 I で**一様収束**するといいます。

問題

数列 $\{a_n\} = 1, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{9}, \ldots, \dfrac{1}{n^2}$ は $n \to \infty$ のとき収束することを，$\varepsilon - N$ 論法で示してください。

参考文献

細井勉，わかるイプシロン・デルタ，日本評論社，1995. ISBN978-4-53578-217-4
瀬山士郎,「無限と連続」の数学—微分積分学の基礎理論案内，東京図書，2005. ISBN978-4-48900-708-8
齋藤正彦，微分積分学，東京図書，2006. ISBN978-4-48900-732-3