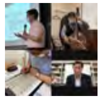
2022年度秋学期 応用数学（解析） 第4回

第1部・「無限」の理解 収束とは何か，ε - δ 論法

浅野 晃
関西大学総合情報学部



微分を習ったときの説明💡

何かだまされている気がする🤔

微分の説明

関数 $f(x) = x^2$ の微分

$$\begin{aligned}\frac{df(x)}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x\end{aligned}$$

h はゼロに近づいているだけで，
ゼロではないから，
分母分子を h で割る

やっぱり h はゼロ

これっておかしく
ありませんか？

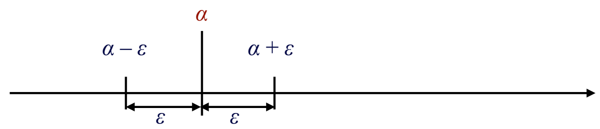
収束＝「限りなく近づく」ことの意味🤔

数列の収束の定義

数列$\{a_n\}$が α に収束するとは

α のまわりにどんなに狭い区間

$[\alpha-\varepsilon,\, \alpha+\varepsilon]$ $(\varepsilon>0)$ を設定しても，



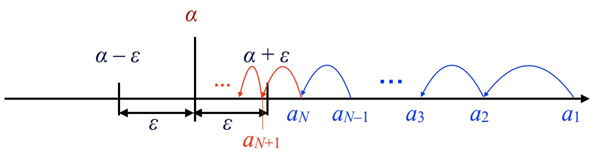
数列の収束の定義

数列$\{a_n\}$が α に収束するとは

数列が十分大きな番号 N まで進めば

N 番より大きな番号 n については，

a_n は，みなその狭い区間$[\alpha-\varepsilon,\, \alpha+\varepsilon]$に入る



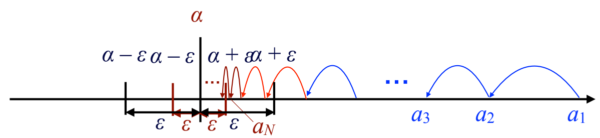
数列の収束の定義

数列$\{a_n\}$が α に収束するとは

数列が十分大きな番号 N まで進めば

N 番より大きな番号 n については，

a_nは，みなその狭い区間$[\alpha-\varepsilon,\, \alpha+\varepsilon]$に入る



εをどんなに小さくしても　そういうNがある

数列の収束の定義

数列$\{a_n\}$が α に収束するとは

α のまわりにどんなに狭い区間$[\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon]$を設定しても$(\varepsilon > 0)$

数列が十分大きな番号 N まで進めば

N 番より大きな番号 n については,
a_nはみなその狭い区間$[\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon]$に入る

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N; n > N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

$\varepsilon - N$ 論法

数列の発散の定義

数列$\{a_n\}$が ∞ に発散する

どんなに大きな数 G を持ってきても,

数列が十分大きな番号 N まで進めば

N 番より大きな番号 n については, a_nはみな G より大きくなる

$$\forall G, \exists N; n > N \Rightarrow a_n > G$$

収束や発散は「無限」なのか

「無限」とはひとことも言っていない

どんなに狭い区間 $[\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon]$ でも

どんなに大きな数 G でも

十分大きな番号 N なら

どれも「無限」ではなく有限

ただし, 求めに応じて
好きなだけ狭く・大きくできる

実数の連続性と収束🤔

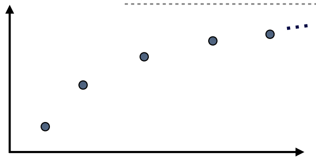
実数の連続性と収束

実数の連続性を述べる公理の, 4つめの表現

実数の有界な単調数列は収束する

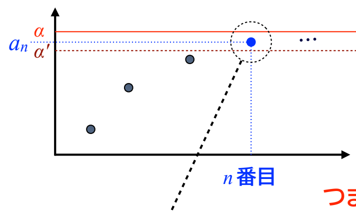
数列$\{a_n\}$が「単調増加」とは, $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$

「単調減少」とは, $a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots$



単調増加だから
つねに増加していくが, 収束する

ワイエルシュトラスの定理から証明



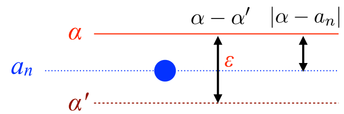
有界だから, 上限 α が存在する

α より小さい α' を考えると

α' と α の間に来る a_n がある

つまり,

α' はどれだけ α に近くてもよい



$|\alpha - a_n| < \alpha - \alpha'$ これを $\varepsilon(>0)$ と考えると

α からの隔たり ε をどんなに小さく設定しても, そこに入る a_n がある

$\{a_n\}$ は α に収束する

数列の収束に関する例題💡

例題

$a > 0$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ を証明せよ。

$\dfrac{a^k}{k!} = C$ とおく。番号 k は, $k > 2a$ であるとする。

$n > k$ となる番号 n について,

$$\begin{aligned}\frac{a^n}{n!} &= \frac{a^k}{k!} \times \frac{a}{k+1} \times \frac{a}{k+2} \times \cdots \times \frac{a}{n} \\ &= C \times \frac{a}{k+1} \times \frac{a}{k+2} \times \cdots \times \frac{a}{k+(n-k)}\end{aligned}$$

例題

$n > k$ となる番号 n について,

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^k}{k!} \times \frac{a}{k+1} \times \frac{a}{k+2} \times \cdots \times \frac{a}{n}$$

$$= C \times \frac{a}{k+1} \times \frac{a}{k+2} \times \cdots \times \frac{a}{k+(n-k)}$$

$k > 2a$ なので

$$\frac{a^n}{n!} < C \times \frac{a}{2a \cancel{+1}} \times \frac{a}{2a \cancel{+2}} \times \cdots \times \frac{a}{2a \cancel{+(n-k)}}$$

$$< C \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{C \cdot 2^k}{2^n} < \frac{C \cdot 2^k}{n}$$

つまり
$\{a^n / n!\}$ は 0 に収束する

そこで, どんな小さな $\varepsilon(>0)$ についても, 番号 n が $n > \dfrac{C \cdot 2^k}{\varepsilon}$ であれば $\dfrac{a^n}{n!} < \varepsilon$

関数の極限🤔

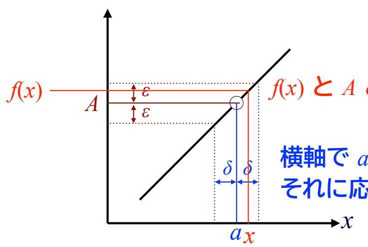
関数の極限

数列の収束と同じ論法を用いる

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

関数 $f(x)$ の $x \to a$ の極限が A であるとは

縦軸で A との隔たり ε をどれほど小さくしても



$f(x)$ と A との隔たりも ε より小さい

横軸で a との隔たり δ を
それに応じて小さくすれば

x と a との隔たりが δ より小さいとき

関数の極限

どんなに小さな ε を考えても $(\varepsilon > 0)$

x と a との隔たりを δ より小さくすれば

$f(x)$ と A の隔たりも ε より小さくできる

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$ $\varepsilon - \delta$ 論法

ε も δ も, ただの正の数で, 0ではないし,
0に「無限に」近づくわけでもない

最初の微分の例

$h \to 0$ と書いてあっても，h はあくまで正の数で，0ではない

$$
\begin{aligned}
\frac{df(x)}{dx} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x
\end{aligned}
$$

hはゼロに近づいているだけで，
ゼロではないから，分母分子をhで割る

やっぱりh はゼロ　ではなくて

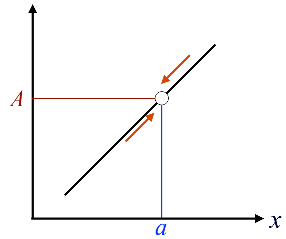
収束する先が $h=0$ を代入したときの値と同じ，というだけ

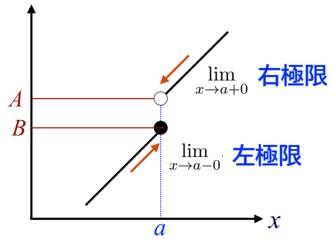
左極限と右極限

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

関数 $f(x)$ の $x \to a$ の極限が A であるとは

x が大きい方から a に近づいても，小さい方から a に近づいても，
どちらの極限も A



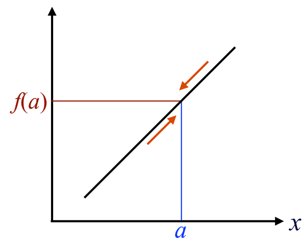


関数の「連続」と「一様連続」🤔

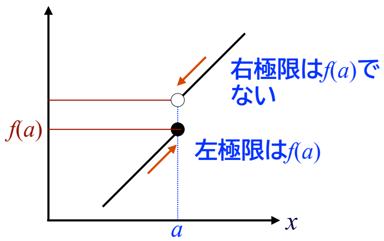
関数の連続性

関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続であるとは

関数 $f(x)$ の $x \to a$ の極限が $f(a)$ であること



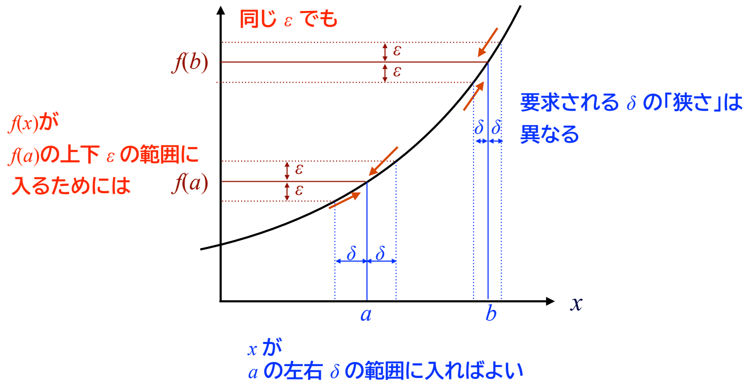
a で連続



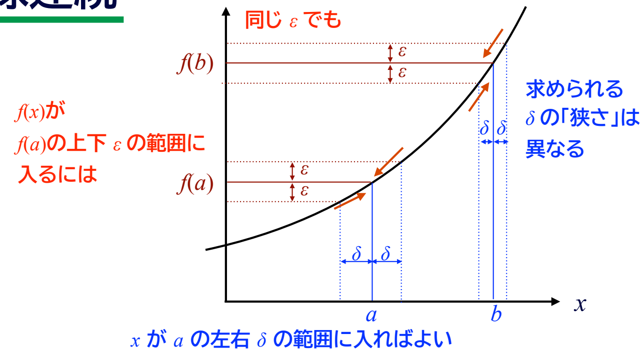
a で不連続

区間 I のどの点でも連続なら「区間 I で連続」

$\varepsilon-\delta$ 論法で話をすると



一様連続

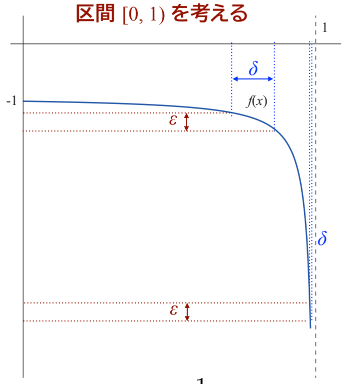


この場合は「狭い方の δ 」をどこででも用いればよい

どの点でも「共通の δ 」を用いれば連続といえるとき[一様連続]という

連続だが一様連続でない例

区間 $[0, 1)$ を考える



$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

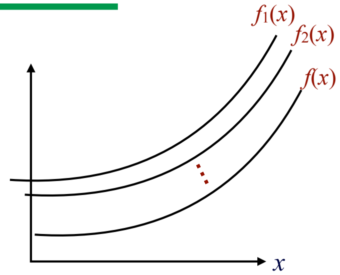
x が 1 に近づくと
$f(x)$ は, いくらでも大きく変化する

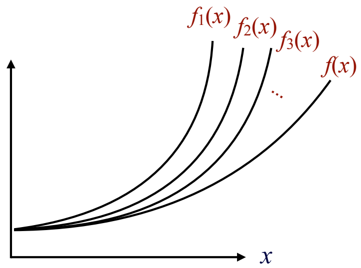
要求される δ の「狭さ」は
いくらでも狭くなる

区間内で「共通の δ 」は
存在しない

関数列の収束🤔

関数列の収束と「一様収束」





区間内の各点で,
$f_n(x)$ と $f(x)$の隔たりが0に近づく

$f_1(x), f_2(x), \ldots$ が $f(x)$ に
[各点収束]する

左のほうでは収束していくが

いくらでも右に行けば
いつまでたっても収束しない

各点収束ではあるが[一様収束]でない

今日のまとめ

「限りなく近づく」とは,
「無限」ではない

求めに応じて
好きなだけ近くできること