

微分方程式とは🤔

微分方程式とは

ふつうの方程式は、解は「数」 $x^2 - 5x + 3 = 0$

微分方程式は、解が「関数」で、その微分が含まれる方程式

x が t の関数(つまり $x(t)$) のとき、

$x' = x$ 関数は「量の変化」
 $x'' - 5x' + 6x = 0$ 微分方程式は「変化の条件」

微分方程式を解くと、「どう変化するか」がわかる

1階・2階, 常微分・偏微分

1階導関数に関する微分方程式: $x' = x$
1階微分方程式

2階導関数に関する微分方程式: $x'' - 5x' + 6x = 0$
2階微分方程式

⋮

1変数関数の微分方程式は常微分方程式
2変数以上の関数の偏微分に関する
微分方程式は偏微分方程式

微分方程式を解くとは

微分方程式を「解く」とは、
その方程式を満たす関数を見つけること

微分方程式は
特定のパターンのものしか解けない

解ける微分方程式のうち、簡単なものの
基本的なパターンをいくつか紹介します。

微分方程式の例 🤔

運動方程式

物体に働く力と、その運動との関係

力 F

物体の質量 m

物体の加速度 a

$$F = ma$$

加速度は速度の微分、
速度は位置の微分だから、

時刻 t の物体の位置を $x(t)$ とすると $F = mx''$

これを解いて関数 $x(t)$ を求めると、時刻 t での物体の位置がわかる

落下の問題

物体が空気中を落下するとき

力 $F =$ 下向きの重力 $mg +$ 上向きの抵抗力

抵抗力は速度の2乗に比例する $-k(x')^2$

運動方程式は $F = mx''$ なので $mg - k(x')^2 = mx''$

放射性物質の崩壊

崩壊の速度は, 現在存在する物質の量に比例する

時刻 t の時点で存在する物質の量を $x(t)$ とすると

$$x' = -kx$$

一般解・特殊解・特異解 🤔

一般解と特殊解

時刻 t の時点で存在する物質の量を $x(t)$ とすると $x' = -kx$

定数 k が決まったら, 解はひとつの関数に決まるか?

決まらない

最初 $t = 0$ に存在する物質の量 $x(0)$ が
わからないと解はひとつに決まらない

初期値という

一般解と特殊解

初期値が定まったときに求められる解を
特殊解 (particular solution)
という

初期値が定まっていないとき,
初期値を代入したらひとつの特殊解が求められるような形の解を
一般解 (general solution)
という

一般解の例: $x(t) = C \exp(-kt)$

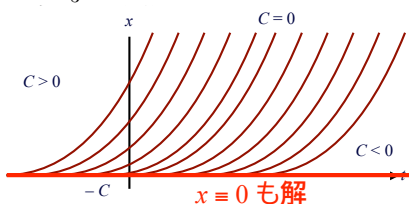
初期値が定まってはじめて決まる
パラメータ

特異解と解の一意性

$x' = x^{\frac{1}{3}}$ の一般解 $x = \left\{ \frac{2}{3}(t+C) \right\}^{\frac{3}{2}}$ (C は定数)

(なぜならば) $x' = \frac{3}{2} \left\{ \frac{2}{3}(t+C) \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{3}$
 $= \left\{ \frac{2}{3}(t+C) \right\}^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{3}}$

一般解 $x = \left\{ \frac{2}{3}(t+C) \right\}^{\frac{3}{2}}$



でも, $x \equiv 0$ も解では?

一般解 $x = \left\{ \frac{2}{3}(t+C) \right\}^{\frac{3}{2}}$ には
 C をどう変えても含まれない

特異解 (singular solution) という

特異解と解の一意性

初期値がひとつ定まったときに, 解がひとつだけに決まることを,
 解が一意 (unique) であるという

一意性の十分条件のひとつ「リプシッツ条件」

微分方程式が $x'(t) = f(t, x)$ のとき, 初期値のまわりでどんな x_1, x_2 についても

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

となる定数 L があるなら, その初期値について一意

「 x のわずかな変化について,
 f がいくらでも大きく変化する, ということはない」くらいの意味

変数分離形 🤔

変数分離形

$x' = -kx$ を解く

$\frac{dx}{dt} = -kx$ と直す $x \neq 0$ として $\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = -k$ と変形する

両辺を t で積分 $\int \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} dt = \int (-k) dt$

置換積分をする $\int \frac{1}{x} dx = \int (-k) dt$

積分を解く $\int \frac{1}{x} dx = - \int k dt$

$\log|x| + C_1 = -kt + C_2$ C_1, C_2 は積分定数

変数分離形

$x' = -kx$ を解く

積分を解く $\int \frac{1}{x} dx = - \int k dt$

$$\log |x| + C_1 = -kt + C_2$$
$$\log |x| = -kt + (C_2 - C_1)$$
$$x = \pm \exp\{-kt + (C_2 - C_1)\}$$
$$x = \pm \exp(C_2 - C_1) \exp(-kt)$$

$\pm \exp(C_2 - C_1)$ をあらためて定数 C とすると 一般解は $x(t) = C \exp(-kt)$

さっき $x \neq 0$ としたが, $x = 0$ も解で, 一般解に含まれる。

変数分離形

$x' = -kx$ を解くとき, ふつうは

$$\frac{dx}{dt} = -kx \text{ から } \frac{dx}{x} = -k dt \text{ と, 分数の計算のように変形し}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \int (-k) dt \text{ と積分する}$$

x が左辺, t が右辺に分離しているので, 変数分離形という

変数分離形

一般には $g(x)x' = f(t)$

$$x' = \frac{dx}{dt} \text{ とすると } g(x) dx = f(t) dt$$

$$\text{両辺それぞれを積分すると } \int g(x) dx = \int f(t) dt + C$$

一般解に含まれる積分定数 C は,
初期値を代入して定まり, 特殊解が得られる

例題💡

例題

$9x \cdot x' + 4t = 0$ を解いて 一般解を求めよ。
 $x(3) = 2$ とするときの特殊解を求めよ。

$$x' = \frac{dx}{dt} \text{ として変数分離すると } 9x dx = -4t dt$$

$$\text{両辺それぞれを積分すると } \frac{9}{2}x^2 = -2t^2 + C_0$$

$$\text{すなわち } \frac{t^2}{9} + \frac{x^2}{4} = C_1 \quad (t-x \text{ 平面の楕円群})$$

例題

$9x \cdot x' + 4t = 0$ を解いて 一般解を求めよ。
 $x(3) = 2$ とするときの特殊解を求めよ。

$$\text{一般解は } \frac{t^2}{9} + \frac{x^2}{4} = C_1$$

初期値が $x(3) = 2$ なので
 $t = 3$ のとき $x = 2$ だから、代入すると $C_1 = 2$

$$\text{特殊解は } \frac{t^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 2$$

今日のまとめ

微分方程式は、関数とその微分に関する方程式
解は数ではなく関数

解ける方程式のパターンは限られている

もっとも基本的なパターン
「変数分離形」